

ÜBER ENDLICHE GEOMETRIEN

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II

DER

UNIVERSITÄT BERN

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

RAYMOND STETTLER

(VON BOLLIGEN)

HELSINKI 1950

SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

ÜBER ENDLICHE GEOMETRIEN

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II

DER

UNIVERSITÄT BERN

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

RAYMOND STETTLER

(VON BOLLIGEN)

Von der Philosophischen Fakultät II auf Antrag
des Herrn Prof. Dr. W. SCHERRER angenommen.

Bern, den 11. Dezember 1947.

Der Dekan:

Prof. Dr. H. HADWIGER.



HELSINKI 1950
KIRJAPAINO O.Y. SANA

Einleitung.¹⁾

Wie bekannt, lässt sich aus den ebenen Verknüpfungsaxiomen und den Anordnungsaxiomen (in Hilberts Bezeichnung I 1 — 3 und II 1 — 4) beweisen, dass jede Gerade unendlich viele Punkte besitzt. Für diesen Beweis ist das Axiom von Pasch II 4 unerlässlich; denn es lassen sich Modelle mit endlich vielen Punkten und Geraden angeben, für die sogar die Axiome I 1 — 8 und II 1 — 3 gültig sind. Ein solches Modell heisse eine »endliche Geometrie«.

Modelle dieser Art sind ursprünglich von G. JÄRNEFELT in seiner Arbeit: »Einige Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen den geometrischen Verknüpfungsaxiomen und gewissen taktischen Konfigurationen« angegeben worden.²⁾ Das Ergebnis dieser Untersuchung besagt im wesentlichen, dass zu jeder Primzahl $p \geq 5$ ein Modell existiert, das auf jeder Geraden genau p Punkte besitzt und die Axiome I 1 — 8, II 1 — 3, sowie das verschärfte Parallelenaxiom IV* erfüllt. Der Nachweis dieser Tatsache erfolgt mittelst expliziter kombinatorischer Vorführungen (unter Vorweisung von Tabellen).

In Verallgemeinerung dieser Untersuchungen, stellte sich das Problem, alle überhaupt möglichen Modelle aufzusuchen, die den Axiomen I 1 — 8, II 1 — 3, IV* und einem »Endlichkeitsaxiom E« (»Es gibt nur endlich viele Punkte«) genügen.

Zuerst schliesst man aus den Axiomen I 1 — 8, IV* und E, dass auf jeder Geraden gleich viele Punkte liegen, und dass die Anordnungsaxiome II 1 — 3 stets erfüllbar sind, sobald auf einer Geraden mindestens 5 Punkte liegen. Auf die weitere Beibehaltung der Anordnungsaxiome konnte deshalb verzichtet werden.

Bezüglich des so modifizierten Axiomensystems (räumliches AAS genannt) lässt sich nun folgendes zeigen:

Die von G. JÄRNEFELT aufgefundenen Modelle sind nicht die einzigen; vielmehr gibt es zu jeder Primzahlpotenz p^s ($s > 0$) ein und nur ein Modell, das auf jeder Geraden p^s Punkte besitzt. Andere Modelle gibt es nicht. Die Struktur der Modelle lässt sich explizit angeben; zu

¹⁾ Herrn Dr. P. BERNAYS, Professor an der Eidg. Technischen Hochschule in Zürich, bin ich für viele wertvolle Anregungen und Diskussionen sehr zu Dank verpflichtet.

²⁾ Annales Acad. scient. Fennicae, Ser. A. Tom. XXXII, No. 13, 1929.

ihrer Beschreibung sind die Galoisfelder heranzuziehen. Was die Beweismethode betrifft, so ist diese gänzlich verschieden von derjenigen von G. JÄRNEFELT. Sie beruht im wesentlichen auf der Verallgemeinerung der *Hilbertschen Streckenrechnung* auf den Raum und auf die Anwendung eines Satzes von J. H. MACLAGAN WEDDERBURN über endliche Schiefkörper.

Von Interesse erwies sich auch die Untersuchung ebener Modelle. Wie man weiss, liegen für die Inzidenzgeometrie der Ebene die Verhältnisse komplizierter als im Raum, weil hier nicht-desarguessche Geometrien, und zwar auch mit endlich vielen Punkten, möglich sind. Erstmals wurde eine solche endliche nicht-desarguessche Geometrie von O. VEBLEN und MACLAGAN WEDDERBURN angegeben.¹⁾

Die naheliegende Frage nach der algebraischen Charakterisierung einer endlichen Geometrie, die nur den Axiomen I 1 — 3, IV und E genügt, erwies sich als sehr kompliziert. Deshalb wurde von vorneherein eine Vereinfachung getroffen, indem ein stark spezialisierter Fall des Satzes von Desargues als weiteres Axiom gefordert wurde. (Axiom Δ_1 , § 1 und Fig. 1). Dieses Axiomensystem (kleines affines Axiomensystem genannt, abgekürzt aAS) lässt sich wieder, unter Verwendung der Hilbertschen Streckenrechnung, algebraisch charakterisieren. Das dazu nötige sog. kleine desarguessche Zahlensystem zeigt starke Anomalien.²⁾ Ferner ist der Satz von Desargues im aAS nicht beweisbar.

Im Anschluss daran wird das »Affine Axiomensystem« (abgekürzt AAS) betrachtet, das sich aus den Axiomen I 1 — 3, IV, E und Δ_2 zusammensetzt. Das Axiom Δ_2 (§ 1 und Fig. 2) ist dabei eine weitere, weniger starke Spezialisierung des Satzes von Desargues. Diese Geometrie ist desarguessch; sie lässt sich deshalb, nach einem Satz von Hilbert, zu einer räumlichen Geometrie erweitern, in der die Axiome I 1 — 8, IV* und E gelten.³⁾

¹⁾ Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 8, 1907.

²⁾ Die endlichen »einseitig-distributiven Zahlensysteme« von I. E. DICKSON sind spezielle kleine desarguessche Zahlensysteme.

³⁾ Nach Abschluss der vorliegenden Arbeit wurde ich auf das Buch von F. W. LEVI, »Finite Geometrical Systems«, Calcutta, 1942, aufmerksam gemacht. Einer ausführlichen Rezension, die ich Herrn Dr. P. KUSTANHEIMO, verdanke, ersehe ich, dass F. W. LEVI, dieselben Probleme in z.T. wesentlich erweiterter Form gestellt und gelöst hat.

Die Erweiterungen beziehen sich einmal auf § 10 Satz 12; dieser Satz lässt sich auf beliebig viele Dimensionen verallgemeinern. Sodann werden Methoden angegeben, mittelst welchen sich kleine Desarguessche Zahlensysteme herstellen lassen. Besonders betrachtet werden die mittelst endlicher Alternativkörper (eine besondere Klasse von kleinen Desarguesschen Zahlensystemen) konstruierten ebenen Geometrien. In ihnen gilt der Satz vom vollständigen Vierseit, dagegen Δ_2 nicht. Umgekehrt folgt aus dem als Axiom geforderten Satz vom vollständigen Vierseit in Verbindung mit den Verknüpfungsaxiomen, dass die zugehörige Hilbertsche Streckenrechnung einem Alternativkörper äquivalent ist.

§ 1. Die zwei Axiomensysteme.

Die der axiomatischen Analyse zu Grunde gelegten Axiomensysteme (AS), das »Kleine affine AS« und das »Affine AS« setzen sich aus den folgenden Axiomen zusammen:

Kleines affines Axiomensystem aAS:

I 1—3, IV, E, Δ_1

Affines Axiomensystem AAS

I 1—3, IV, E, Δ_2

Dabei bedeuten

I 1—3 Ebene Verknüpfungsaxiome

- I 1. Zu zwei Punkten A, B gibt es stets eine Gerade a , die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.
- I 2. Zu zwei Punkten A, B gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.
- I 3. Auf jeder Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

IV Verschärftes Parallelenaxiom

Erklärung: Zwei Geraden heissen parallel, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben oder identisch sind.

IV. Zu jeder Geraden a gibt es durch jeden Punkt A eine und nur eine Parallele.

Gemäss Erklärung und Axiom IV ist die Parallelität (Zeichen $||$) eine reflexiv-symmetrisch-transitive Beziehung.

E Axiom der Endlichkeit

Es gibt nur endlich viele Punkte.

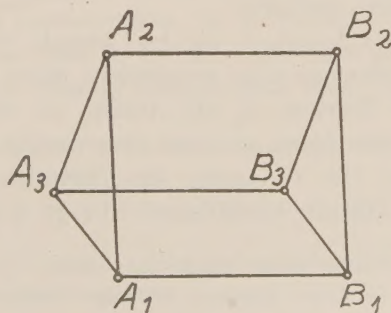


Fig. 1.

Kleines Axiom von Desargues Δ_1 .

Δ_1 Kleines Axiom von Desargues. (Fig. 1)

Wenn in zwei Dreiecken A_i, B_i ($i = 1, 2, 3$) die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken parallel und verschieden sind, und ferner A_1A_2 parallel B_1B_2 , A_2A_3 parallel B_2B_3 , so ist auch A_1A_3 parallel B_1B_3 .

Δ_2 Axiom von Desargues. (Fig. 2)

Wenn in zwei Dreiecken A_i, B_i ($i = 1, 2, 3$) die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch einen Punkt O laufen und verschieden sind, und ferner A_1A_2 parallel B_1B_2 , A_2A_3 parallel B_2B_3 , so ist auch A_1A_3 parallel B_1B_3 .

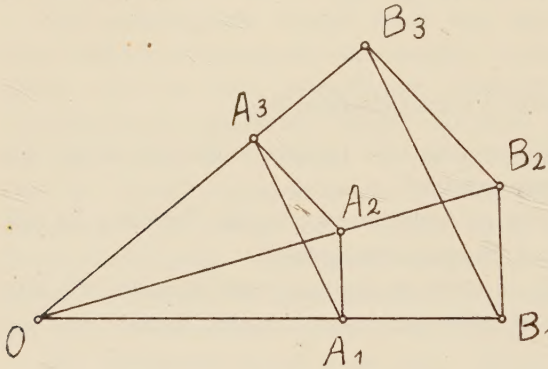


Fig. 2.
Axiom von Desargues Δ_2

§ 2. Bemerkungen zu den beiden Δ S.

Beide Δ S sind erfüllbar; den Nachweis werden wir später durch Aufweisung geeigneter Modelle (Interpretationen) erbringen. Die einzelnen Axiome sind im wesentlichen voneinander unabhängig. Insbesondere werden wir zeigen, dass Δ_2 im α AS unbeweisbar ist (§ 7). Dieser Nachweis ist allerdings schon von O. VEULEN und J. H. MACLAGEN WEDDERBURN¹⁾ geleistet worden. Zum Beweis werden die von L. E. DICKSON angegebenen »einseitig distributiven Zahlensysteme« herangezogen²⁾. Unser im § 7 dargestellter Beweis ist in dem Sinne allgemeiner, als gezeigt wird, dass zur Konstruktion eines Modells des α AS schon viel allgemeinere Zahlensysteme genügen.

Das Axiom Δ_2 im AAS könnte man durch Aufnahme räumlicher Verknüpfungsaxiome vermeiden; dann wäre nämlich Δ_2 beweisbar. Nimmt man dagegen Δ_2 als Axiom, so erhält man insofern eine wesentliche Vereinfachung, als man sich vorerst auf die ebene Geometrie beschränken kann. Der Übergang zur räumlichen Geometrie lässt sich dann später sehr einfach vornehmen. (Vergl. § 10).

¹⁾ Trans. Amer. Math. Soc. 1907.

²⁾ On finite Algebras, Göttinger Nachr. 1905.

Die beiden Axiomensysteme (und besonders die projektiven Fassungen) sind schon wiederholt untersucht worden¹⁾. Jedoch beschränken sich die Arbeiten darauf gewisse (oft komplizierte) Modelle anzugeben.

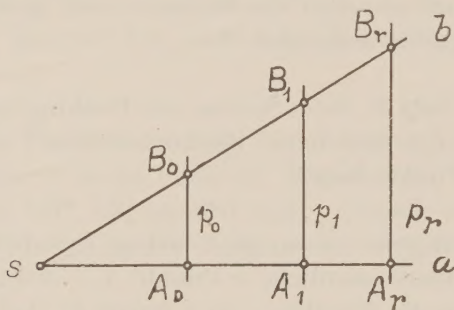
Das Ziel unserer axiomatischen Untersuchung ist die algebraische Charakterisierung der AS; für das AAS gelingt es dabei, eine volle Übersicht über die Modelle zu erhalten, (§ 8). Endlich wird in § 10 das AAS zu einem »räumlichen AAS« erweitert, wobei die möglichen Modellstrukturen sich wieder explizit angeben lassen.

§ 3. Einige grundlegende Folgerungen aus dem aAS.

Die nachfolgenden Sätze 1 — 3 sind schon unter alleiniger Benützung der Axiome I 1 — 3, IV, E beweisbar²⁾.

Satz. 1. Auf jeder Geraden liegen gleichviele Punkte. (Fig. 3).

Fig. 3.
Zu Satz 1.



Beweis. a und b seien zwei beliebige Geraden. Zu zeigen ist, dass auf a und b gleichviele Punkte liegen.

Vorerst sei $a \nparallel b$; Schnittpunkt S . Auf a existiert Punkt $A_0 \neq S$; ebenso existiert Punkt $B_0 \neq S$ auf b . Also $A_0 \neq B_0$. Die Gerade A_0B_0 heiße p_0 . Dann lässt sich jedem Punkt von a eindeutig ein Punkt von b zuordnen ($\rightarrow$): $S \rightarrow S, A_0 \rightarrow B_0$; sind dann $A_i (i = 1, 2, \dots, r)$ weitere von S und A_0 verschiedene Punkte auf a , so lege man durch sie bzw. die Parallelen $p_i \parallel p_0 (i = 1, 2, \dots, r)$. Diese treffen b notwendig in voneinander verschiedenen Punkten $B_i (i = 1, 2, 3, \dots, r)$, also $A_i \rightarrow B_i$. Also gibt es auf b mindestens so viele Punkte wie auf a . Analog beweist man, dass a min-

¹⁾ O. VEULEN, A System of Axioms for Geometry, Trans. Amer. Math. Soc. 1904.

K. T. VAHLEN, Abstrakte Geometrie, Leipzig 1905, S. 63 — 64.

G. JÄRNEFELT, Ann. Acad. scient. Fennicae, Ser. A, Tom. XXXII No. 13, 1929.

BOSKOWITZ, (siehe Järnefelt).

²⁾ Es sei ausdrücklich bemerkt, dass sich die Sätze 1 — 3 in der projektiven Fassung der Axiomensysteme besonders einfach beweisen lassen.

destens so viele Punkte wie b enthält. Somit liegen auf a und b *gleichviele Punkte*.

Ist aber $a \parallel b$, so lege man etwa eine Hilfsgerade h , die beide trifft. Dann liegen auf a und h , und h und b gleich viele Punkte, also auch auf a und b .

Satz 2. Wenn auf einer Geraden n Punkte liegen¹⁾ (und somit auf jeder Geraden), so laufen durch jeden Punkt $n + 1$ Geraden.

Beweis: P sei ein beliebiger Punkt ausserhalb a . Sind A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) die n Punkte auf a , so lassen sich n Verbindungsgeraden PA_i ziehen. Ausserdem existiert die Parallele p zu a durch P . Ausser diesen $n + 1$ Geraden durch P kann es keine weiteren geben; denn diese hätte notwendig einen von den A_i verschiedenen Schnittpunkt mit a . Dann hätte aber a mehr als n Punkte. Widerspruch.

Die beiden vorstehenden Sätze sind von grundsätzlicher Bedeutung. Durch sie wird die Existenz einer gewissen Zahl von Hilfspunkten und -geraden sichergestellt.

Satz 3. Jedes System von Punkten und Geraden, das die Axiome I 1—3, IV, E erfüllt, hat n^2 Punkte und $n(n + 1)$ Geraden, falls auf einer Geraden n Punkte liegen.

Beweis: a sei eine beliebige Gerade und P beliebig ausserhalb a . Man verbinde sämtliche n Punkte A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) auf a mit P . Ferner lege man die Parallele p zu a durch P . Auf diesen Geraden liegen n^2 Punkte, wie eine einfache Abzählung ergibt. Weitere Punkte gibt es nicht. Denn sei etwa X ein weiterer Punkt. Nach Satz 1 kann X weder auf a noch auf den Verbindungsgeraden PA_i , noch auf p liegen. Somit würde die Verbindungsgerade PX a in einen Punkt Y treffen, der von den A_i verschieden wäre. Dann lägen aber auf a $n + 1$ Punkte. Widerspruch.

Nach Satz 2 laufen durch jeden Punkt $n + 1$ Geraden. Somit ist die Zahl der Geraden $\frac{n^2(n + 1)}{n} = n(n + 1)$.

Satz 4. (Umkehrung von Δ_1)²⁾.

Sind in zwei Dreiecken A_i, B_i ($i = 1, 2, 3$) die entsprechenden Seiten parallel und sind die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken A_1B_1 und A_2B_2 parallel und verschieden, so ist auch A_3B_3 parallel A_1B_1 .

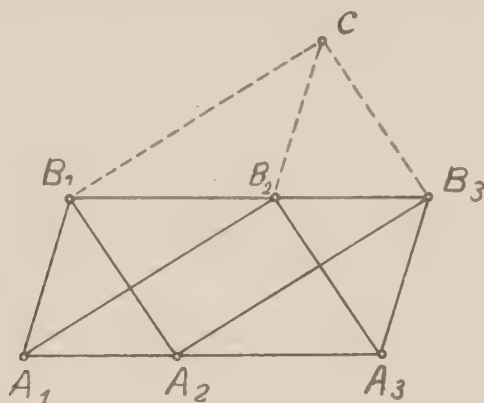
¹⁾ n ist nicht willkürlich wählbar; wegen I 3 ist jedenfalls $n > 1$.

²⁾ Im Folgenden soll der Einfachheit halber unter Δ_1 sowohl das Axiom in § 1 als auch dessen Umkehrung (Satz 4) verstanden werden.

Beweis: Gegenannahme führt auf Widerspruch mit Δ_1 .

Satz 5. Kleiner Pappusscher Satz, (Fig. 4).

Fig. 4.
Kleiner Pappusscher Satz.

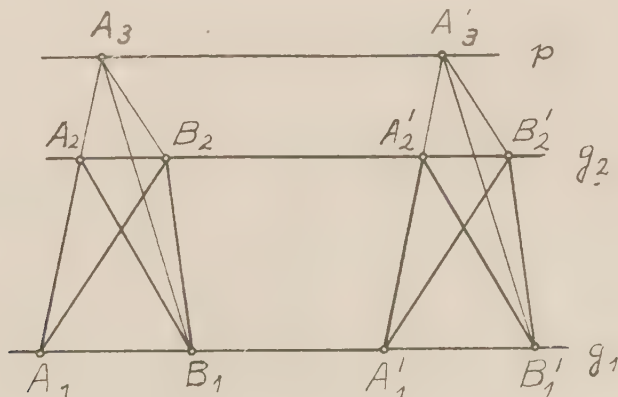


Es seien A_i bzw. B_i ($i = 1, 2, 3$) je drei verschiedene Punkte auf zwei parallelen Geraden. Ist dann A_1B_2 parallel A_2B_3 und A_2B_1 parallel A_3B_2 , so ist auch A_1B_3 parallel A_3B_1 .

Beweis: Man lege durch B_1 die Parallele zu A_1B_2 und durch B_2 die Parallele zu A_1B_1 . Diese treffen sich in einem Punkt C . Wendet man Δ_1 auf die Figur $A_1A_2B_1, B_2B_3C$ an, so folgt CB_3 parallel A_2B_1 . Erneute Anwendung von Δ_1 auf die Figur $B_1B_2C, A_2A_3B_3$ gibt A_3B_3 parallel B_2C , also nach Konstruktion auch parallel A_1B_1 .

Satz 6. Es seien A_1, B_1, A'_1, B'_1 und A_2, B_2, A'_2, B'_2 je vier Punkte auf zwei parallelen Geraden g_1 und g_2 . Ist dann A_1A_2 parallel $A'_1A'_2$, A_1B_2 parallel $A'_1B'_2$ und A_2B_1 parallel $A'_2B'_1$, so ist auch B_1B_2 parallel $B'_1B'_2$. (Fig. 5).

Fig. 5.
Zu Satz 6.



Beweis: p sei eine Parallel zu g_1 , also auch zu g_2 und von g_1 und g_2 verschieden. Die Geraden A_1A_2 und $A_1'A_2'$ treffen p in bzw. A_3 und A_3' . Man verbinde A_3 mit B_1 und B_2 , entsprechend A_3' mit B_1' und B_2' . Mit A_1 beweist man der Reihe nach $B_1A_3 \parallel B_1'A_3'$, $A_3B_2 \parallel A_3'B_2'$. Daraus folgt wieder mit $A_1B_1B_2 \parallel B_1'B_2'$.

§ 4. Die Hilbertsche Streckenrechnung im aAS.

Wir untersuchen, in wie weit sich die Hilbertsche Streckenrechnung¹⁾ im aAS aufbauen lässt.

x_1 und x_2 seien zwei feste, nicht parallele Geraden mit Schnittpunkt O . E_1 und E_2 , $E_1 \neq O \neq E_2$ seien zwei feste Punkte auf x_1 bzw. x_2 , »Einheitspunkte« genannt. Die Verbindungsgerade E_1E_2 heisse »Einheitsgerade«.

Im Folgenden betrachten wir nur Strecken (d.i. ein geordnetes Punktepaar) mit Anfangspunkt O und mit Endpunkt auf x_1 oder x_2 . Mit diesen Strecken — wir bezeichnen sie mit kleinen griechischen Buchstaben ϵ , mit Indizes versehen — entwickeln wir einen Kalkül.

Definition: Zwei Strecken $OA_1 = \alpha_1$ auf x_1 und $OA_2 = \alpha_2$ auf x_2 heissen »gleich«, in Zeichen

$$OA_1 = OA_2 \text{ oder } \alpha_1 = \alpha_2$$

wenn A_1A_2 parallel E_1E_2 . (Fig. 6).

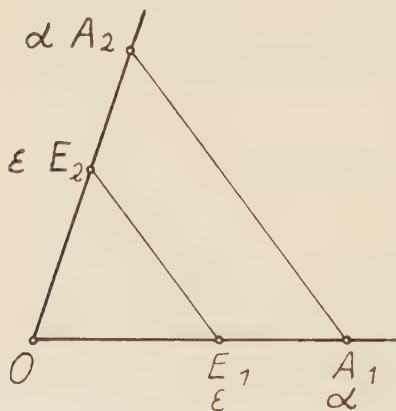


Fig. 6. Definition der Streckengleichheit.

¹⁾ Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. 1930, S. 88—98; im Folgenden kurz als »Grundlagen« zitiert. Siehe auch R. MOUFANG, Math. Ann. Bd. 106.

Demnach sind die »Einheitsstrecken« OE_1 und OE_2 gleich,

$$OE_1 = OE_2 = \varepsilon$$

Die »Nullstrecke« OO bezeichnen wir mit 0, also

$$OO = 0$$

Für diese Strecken erklären wir eine »Addition« vermöge der
Additionsvorschrift:

Sind $OA_1 = \alpha$ und $OB_1 = \beta$ zwei Strecken auf x_1 , so verstehen wir unter ihrer »Summe«, in Zeichen

$$\alpha + \beta$$

eine neue Strecke OS_1 auf x_1 wie folgt: Man lege durch E_2 die Parallele zu x_1 und durch B_1 die Parallele zu x_2 . Ist R ihr Schnittpunkt, so trifft die Parallele zu A_1E_2 durch R die Gerade x_1 in S_1 und wir definieren $OS_1 = \alpha + \beta$. (Fig. 7a).

Fig. 7a Definition der Strecken-addition.

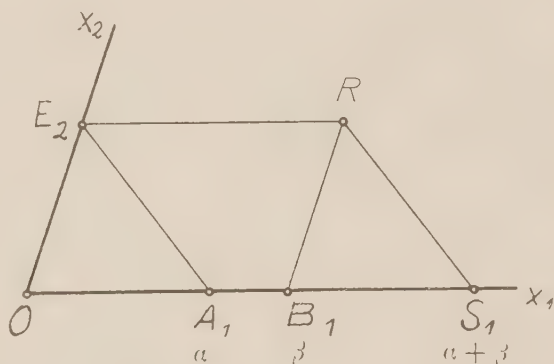
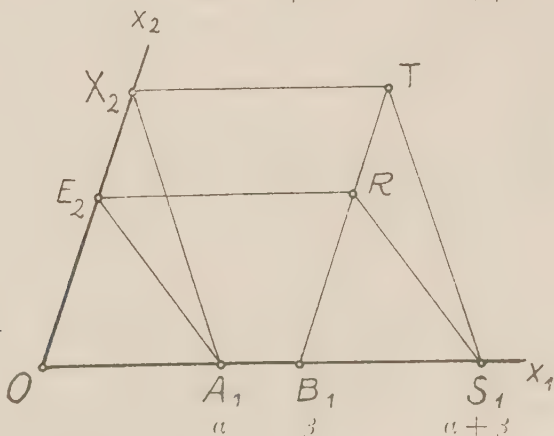


Fig. 7b. Verallgemeinerte Strecken-addition.



Diese Additionsvorschrift lässt sich verallgemeinern. (Fig. 7b)

$X_2 \neq O$ sei ein beliebiger Punkt von x_2 . T sei der Schnittpunkt der Parallelen zu x_1 durch X_2 und der Parallelen zu x_2 durch B_1 . Legt man dann durch T die Parallele zu A_1X_2 , so trifft diese x_1 wieder in S_1 , so dass $\overline{OS_1} = \alpha + \beta$. Dies folgt sofort durch Anwendung von Δ_1 auf die Dreiecke $A_1E_2X_2$ und S_1RT .

Satz 1. Die Streckenaddition ist kommutativ

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

Beweis: (Fig. 8.) Nach der Additionsvorschrift läuft die Behauptung darauf hinaus, dass $B_1E_2 \parallel S_1U$. Da nach Additionsvorschrift $A_1E_2 \parallel S_1R$, $A_1U \parallel B_1R$ und ausserdem $A_1B_1S_1$ und E_2UR auf zwei Parallelen liegen, so folgt mit dem kleinen Pappusschen Satz (§ 3 Satz 5) $B_1E_2 \parallel S_1U$.

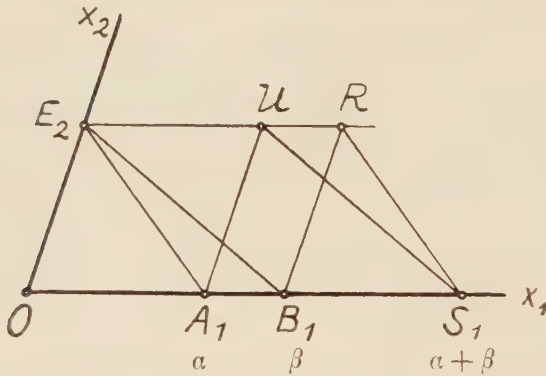


Fig. 8.
Kommutativität der Addition

Satz 2. Die Streckenaddition ist assoziativ.

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

Beweis: (Fig. 9.) Es seien der Reihe nach $OA_1 = \alpha$, $OB_1 = \beta$, $OC_1 = \gamma$. Nach Additionsvorschrift sind $OD_1 = \alpha + \beta$, $OS_1 = (\alpha + \beta) + \gamma$ und

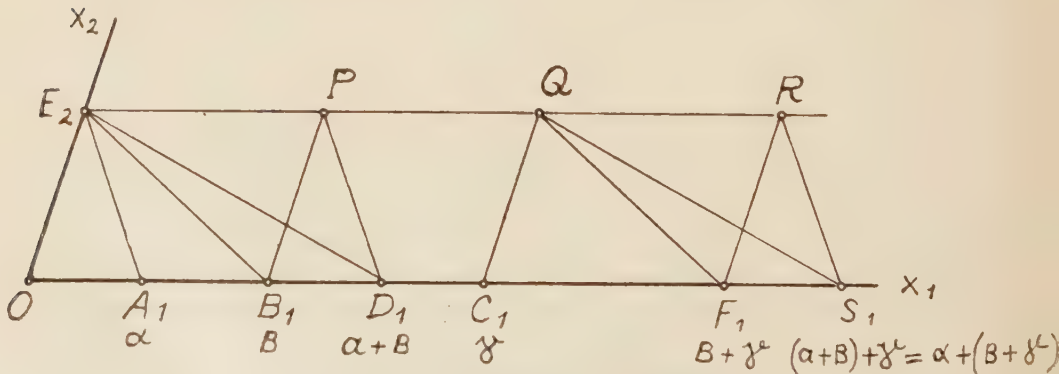


Fig. 9. Assoziativität der Addition.

$OF_1 = \beta + \gamma$ konstruiert worden; also ist $B_1P \parallel C_1Q \parallel x_2$, $E_2A_1 \parallel PD_1$, $QF_1 \parallel E_2B_1$, $QS_1 \parallel E_2D_1$. Ist R der Schnittpunkt der Parallelen zu x_2 durch F_1 und der Parallelen zu x_1 durch E_2 , so ist auch $F_1R \parallel B_1P$. Daraus folgt mit § 3 Satz 6 $RS_1 \parallel PD_1$, oder da $PD_1 \parallel E_2A_1$, auch $RS_1 \parallel E_2A_1$. Dann ist aber nach Additionsvorschrift auch $OS_1 = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Satz 3. Zu jeder Strecke α gibt es eine Strecke $(-\alpha)$, so dass

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

Beweis: (Fig. 10.) Es sei $OA_1 = \alpha$, p sei die Parallele zu x_1 durch E_2 . Die Parallele zu A_1E_2 durch O trifft p in Q und die Parallele zu r_2 durch

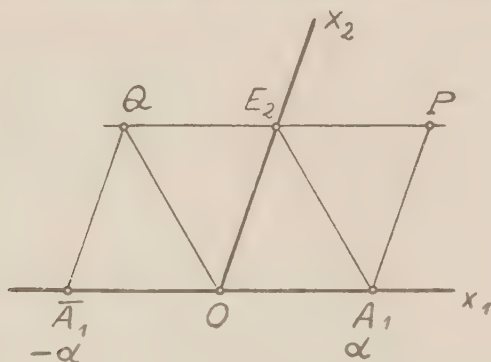


Fig. 10. Existenz des Inverselementes.

Q trifft x_1 in A_1 . Setzt man $\overline{OA_1} = -\alpha$, so ist nach Additionsvorschrift $\alpha + (-\alpha) = \overline{OO} = 0$

Ferner gilt trivial $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$

Hilfssatz: (Fig. 11.) Die beiden festen Geraden x_1 und x_2 sind bezüglich der Addition vertauschbar, d.h. ausführlich: zu den beiden Strecken $\overline{OA_2} = \alpha$ und $\overline{OB_2} = \beta$ auf x_2 konstruiere man eine dritte Strecke $\overline{OS_2}$ auf x_2 wie folgt: Man lege durch einen beliebigen Punkt X_1 auf x_1 die Parallele zu x_2 und durch B_2 die Parallele zu x_1 . Ist T ihr Schnittpunkt, so trifft die Parallele zu X_1A_2 durch T die Gerade x_2 in S_2 . (Verallgemeinerte Additionsvorschrift angewandt auf x_2). Ist dann

$$\overline{OA_2} = \alpha = \overline{OA_1} \text{ und } \overline{OB_2} = \beta = \overline{OB_1}$$

so ist auch

$$\overline{OS_2} = \overline{OS_1} = \alpha + \beta$$

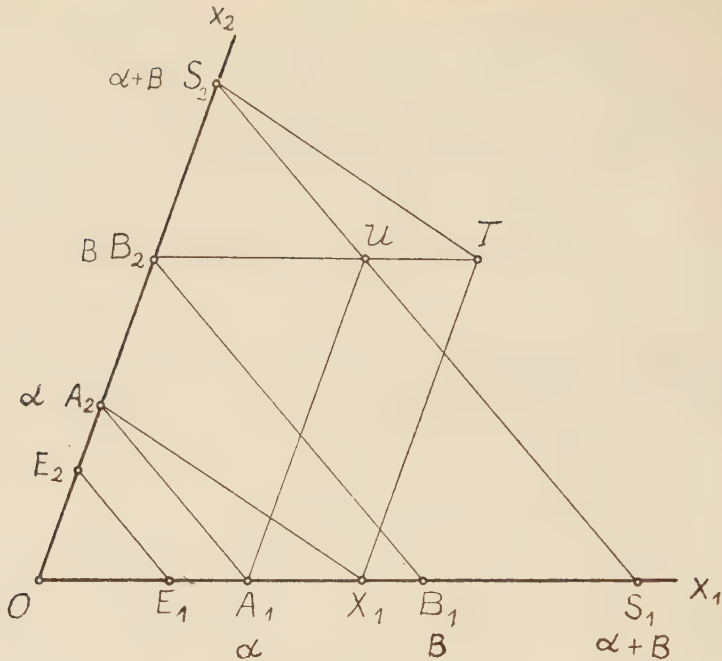


Fig. 11. Vertauschbarkeit der Achsen x_1 und x_2 bezüglich der Addition.

Beweis: Zu beweisen ist $S_1S_2 \parallel E_1E_2$. Wir konstruieren U als Schnittpunkt der Parallelen zu x_1 durch B_2 und der Parallelen zu x_2 durch A_1 . Mit Δ_1 folgt dann $US_2 \parallel A_1A_2$. Nach Voraussetzung ist $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel E_1E_2$, also $US_2 \parallel E_1E_2$. Nach der verallgemeinerten Additionsvorschrift und dem

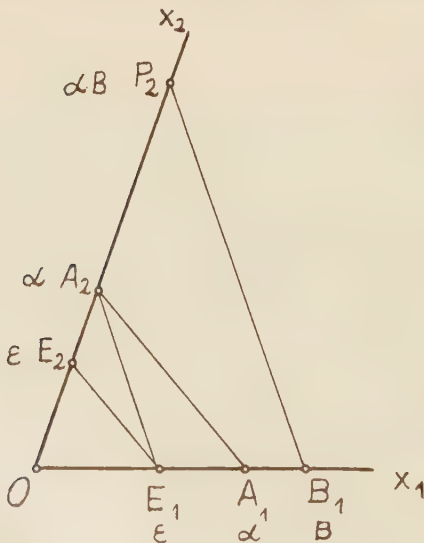


Fig. 12. Definition der Streckenlinks-multiplikation.

Kommutativgesetz (Satz 1) ist dann $S_1U \parallel B_1B_2$, also auch $S_1U \parallel E_1E_2$. Da aber auch $US_2 \parallel E_1E_2$, so liegen S_1 , U und S_2 in einer Geraden parallel E_1E_2 .

Wir erklären eine *Streckenlinksmultiplikation* durch die Vorschrift: (Fig. 12). Sind $OA_1 = OA_2 = \alpha$ und $OB_1 = OB_2 = \beta$ zwei Strecken auf x_1 bzw. x_2 , so erklären wir als ihr »Produkt«, in Zeichen

$$\alpha\beta$$

eine neue Strecke OP_2 auf x_2 wie folgt: Die Parallele zu E_1A_2 durch B_1 trifft x_2 in P_2 ; dann sei $OP_2 = \alpha\beta$.

Aus der Multiplikationsvorschrift entnimmt man sofort

Satz 4. Die Strecke $OE_1 = \varepsilon$ ist das Einselement, denn es ist

$$\varepsilon\alpha = \alpha\varepsilon = \alpha$$

für alle Strecken α .

Satz 5. Für alle Strecken α gilt

$$0\alpha = \alpha 0 = 0$$

Satz 6. Zu den beliebigen Strecken $\alpha \neq 0$ und γ gibt es genau eine Strecke ξ bzw. η , so dass

$$\xi\alpha = \gamma \text{ und } \alpha\eta = \gamma$$

Satz 7. Es gilt das *Links-distributivgesetz*

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Beweis: (Fig. 13). Es seien der Reihe nach $OB_1 = \beta$, $OC_1 = \gamma$, $OA_2 = \alpha$. Die Parallelen zu E_1A_2 durch B_1 und C_1 treffen x_2 in D_2 bzw. F_2 . Nach Multiplikationsvorschrift ist dann $OD_2 = \alpha\beta$ und $\overline{OF_2} = \alpha\gamma$. U sei der Schnittpunkt der Parallelen zu x_1 durch D_2 und der Parallelen zu x_2 durch C_1 . Die Parallele zu E_1A_2 durch U treffe x_1 in S_1 und x_2 in T_2 . Dann ist nach der verallgemeinerten Additionsvorschrift und weil $B_1D_2 \parallel E_1A_2$, $OS_1 = \beta + \gamma$; weiter ist dann nach der Multiplikationsvorschrift $OT_2 = \alpha(\beta + \gamma)$. Mit dem Hilfssatz folgt, da $\overline{OD_2} = \alpha\beta$ und $\overline{OF_2} = \alpha\gamma$, $\overline{OT_2} = \alpha\gamma + \alpha\beta$, oder wegen der Kommutativität (Satz 1) $OT_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

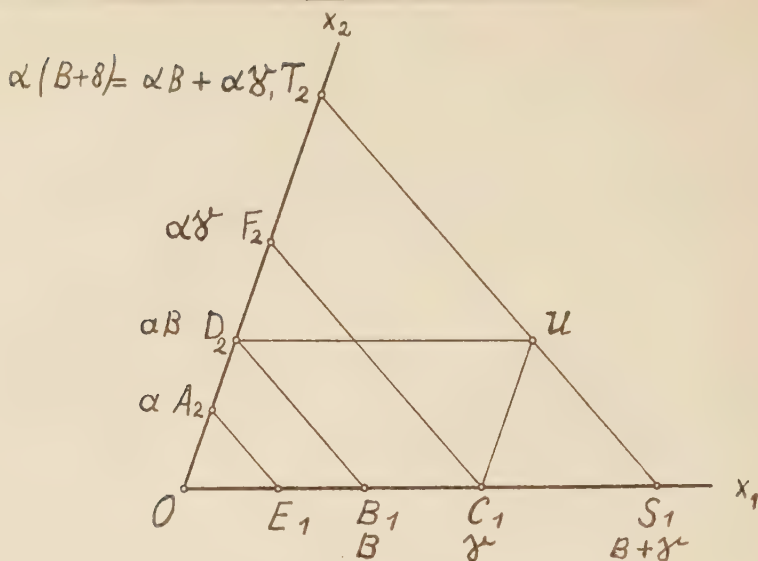


Fig. 13. Links-distributivgesetz.

Koordinatensystem und Geradengleichung.

Das System bestehend aus den festen Geraden x_1, x_2 und den Punkten O, E_1, E_2 heiße ein »Koordinatensystem«. Die Geraden x_1, x_2 heißen »Koordinatenachsen«; O heißt »Ursprung« und E_1, E_2 »Einheitspunkte« des Koordinatensystems (Fig. 14).

Sei P ein beliebiger Punkt. Die Parallelen zu x_1 und x_2 durch P treffen x_1 und x_2 in P_1 bzw. Q_2 . Dann nennt man die Strecken

$$\overline{OP_1} = \xi_1 \text{ und } \overline{OQ_2} = \xi_2$$

die »Koordinaten von P «. Aus der Eindeutigkeit der Konstruktion folgt:

Satz 8. Nach Wahl eines Koordinatensystems gehört zu jedem Punkt P eineindeutig ein geordnetes Streckenpaar (ξ_1, ξ_2) , seine Koordinaten; in Zeichen $P(\xi_1, \xi_2)$.

Satz 9. Die Koordinaten (ξ_1, ξ_2) aller Punkte auf einer Geraden (und nur diese) erfüllen eine lineare Streckengleichung der Form

$$\xi_1 + \beta = 0 \quad (1)$$

oder

$$\xi_2 + \alpha \xi_1 + \beta = 0 \quad (2)$$

je nachdem, ob die Gerade parallel oder nicht parallel zu x_2 ist. α steht dabei notwendig linksseitig von ξ_1

Umgekehrt: Zu jeder Streckengleichung (1) oder (2) gehört eine und nur eine Gerade, die die vorgegebene Streckengleichung zur Geradengleichung besitzt.

Beweis: (Fig. 14). Ist p eine Gerade parallel x_2 , die x_1 in $(-\beta, 0)$ trifft, so genügen die Koordinaten aller Punkte $P(\xi_1, \xi_2)$ auf p (und nur diese) der Gleichung $\xi_1 = -\beta$ oder also

$$\xi_1 + \beta = 0$$

d.h. einer Streckengleichung der Form (1).

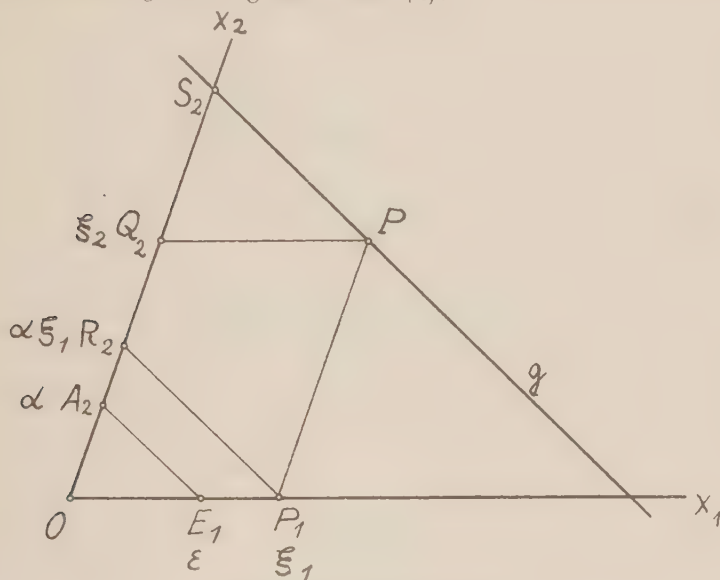


Fig. 14. Geradengleichung.

Sei nun g eine Gerade, die x_2 in $S_2(0, -\beta)$ treffe. Ferner sei $P(\xi_1, \xi_2)$ ein beliebiger Punkt auf g . Legt man durch P die Parallelen zu den Koordinatenachsen, so treffen diese x_1 und x_2 in bzw. P_1 und Q_2 , und es ist $\overline{OP_1} = \xi_1$, $\overline{OQ_2} = \xi_2$. Die Parallele zu g durch E_1 schneide x_2 in A_2 ; man setze $OA_2 = \alpha$. Ferner treffe die Parallele zu E_1A_2 durch P_1 x_2 in R_2 . Nach Multiplikationsvorschrift ist dann

$$\overline{OR_2} = \alpha \xi_1$$

Nach dem Hilfssatz folgt

$$\alpha \xi_1 + \xi_2 = \overline{OS_2} = -\beta$$

oder mit den Sätzen 1,2,3

$$\xi_2 + \alpha \xi_1 + \beta = 0$$

Also genügen alle Punkte $P(\xi_1, \xi_2)$ von g (und nur diese, wie man sich überlegt) einer Streckengleichung der Form (2).

Ist umgekehrt eine Streckengleichung der Form (1) oder (2) gegeben, so kann man sofort die zugehörige Gerade angeben deren Streckengleichung sie darstellt.

Die beiden Typen (1) und (2) lassen auf eine einheitliche Gestalt — die »allgemeine Geradengleichung« — bringen. Denn gemäss dem oben Bewiesenen lässt sich jede Geradengleichung in der Form

$$\delta \xi_2 + a \xi_1 + \beta = 0 \quad (3)$$

darstellen, falls für δ (δ -Operator) nur die Strecken 0 und ε zugelassen werden und ausserdem im Falle $\delta = 0$, $a = \varepsilon$ gesetzt werde. ²⁾

Dann gehört zu jeder Geraden eineindeutig eine Gleichung der Form (3).

Die allgemeine Geradengleichung (3) besitzt insbesondere beweistechnische Vorteile gegenüber (1) und (2).

§ 5. Das kleine Desarguessche Zahlensystem und seine Algebra.

Wir stellen vorerst die in § 4 abgeleiteten Rechengesetze nochmals zusammen ²⁾.

Additionsgesetze.

$$A\ 1) \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

A 2) Es existiert ein Nullelement 0, so dass für alle α

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

A 3) Zu jedem Element α existiert ein Element $-\alpha$, so dass

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

$$A\ 4) \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

Bezüglich der Addition bilden also die Elemente eine abelsche Gruppe.

¹⁾ Das Symbol δ (eventuell auch mit Indizes versehen) werde stets für den δ -Operator vorbehalten.

²⁾ Statt von »Strecken« sprechen wir etwas allgemeiner von »Elementen«, da uns hier nur die algebraischen Eigenschaften interessieren.

*Multiplikationsgesetze.*¹⁾M 1) Für alle α gilt

$$\alpha 0 = 0\alpha = 0$$

M 2) Es existiert ein Einselement $\varepsilon \neq 0$, so dass für alle α

$$\varepsilon\alpha = \alpha\varepsilon = \alpha$$

M 3) Zu jedem $\alpha \neq 0$ und γ gibt es ein und nur ein ξ bzw. η , derart, dass

$$\xi\alpha = \gamma \text{ und } \alpha\eta = \gamma$$

Links distributivgesetz

D 1)

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Erklärung: Ein Zahlensystem, das den Gesetzen A1 — 4, M1 — 3, D1 genügt, heiße ein *kleines Desarguessches Zahlensystem* Z.

Satz 1. In jedem Z gelten folgende weitere Rechengesetze:

$$R\ 1) \quad -(-\alpha) = \alpha$$

$$R\ 2) \quad -(\alpha - \beta) = -\alpha + \beta^2)$$

$$R\ 3) \quad -(\alpha\beta) = \alpha(-\beta)^3)$$

$$R\ 4) \quad \alpha(\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$$

R 5) Aus $\alpha'\beta = \alpha\beta$ und aus $\beta\alpha' = \beta\alpha$ folgt jedesmal $\alpha' = \alpha$, falls $\beta \neq 0$.
(Kürzungsregeln)

R 6) Wenn $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$, so ist auch $\alpha\beta \neq 0$

Beweis: R1) und R2) folgen aus A1 — 4 in bekannter Weise. R3) ist eine wesentliche Folgerung von D1). Einerseits ist

$$\alpha(\beta + (-\beta)) = \alpha\beta + \alpha(-\beta) = 0$$

und andererseits ist

$$\alpha\beta + (-\alpha\beta) = 0$$

Weil die Subtraktion eindeutig ist, folgt durch Vergleich sofort R3).

¹⁾ Ein Bereich, in dem die Gesetze M2) und M3) gelten, heißt nach W. BLASCHKE ein *Normbereich*. (S. Geometrie der Gewebe, Berlin 1938 S. 41).

²⁾ Dabei bedeutet wie üblich $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

³⁾ Dagegen ist im allgemeinen $(-\alpha)\beta \neq -(\alpha\beta)$.

R4) folgt mit R3) aus D1. R5) und R6) sind schwächere Fassungen von M3).

Satz 2. Die Ordnung jedes endlichen kleinen Desarguesschen Zahlensystems ist notwendig eine Primzahlpotenz p^s ($s \geq 1$).

Beweis: 1. Gemäss den Additionsgesetzen bilden die Elemente eine abelsche Gruppe.

2. Alle vom Nullelement verschiedenen Elemente $\alpha \in Z$ haben dieselbe Ordnung p .

Sei p die Ordnung von ε , d.h.

$$\begin{aligned} p\varepsilon &= \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \cdots + \varepsilon = 0 \text{ und} \\ r\varepsilon &= \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \cdots + \varepsilon \neq 0 \quad (0 < r < p) \end{aligned}$$

Ist dann α ein beliebiges Element $\neq 0$ aus Z , so gilt ebenfalls

$$p\alpha = 0 \text{ und } r\alpha \neq 0$$

In der Tat: Mit M1), M2) und D1) folgt

$$\begin{aligned} k\alpha &= \alpha + \alpha + \alpha + \cdots + \alpha \\ &= a\varepsilon + a\varepsilon + a\varepsilon + \cdots + a\varepsilon \\ &= a(\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \cdots + \varepsilon) = a(k\varepsilon), \text{ also} \\ p\alpha &= a(p\varepsilon) = a \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Wäre nun $r\alpha = 0$, ($0 < r < p$) so folgte $r\alpha = a(r\varepsilon) = 0$

Da $r\varepsilon \neq 0$, so folgt mit M1) und R6) $a = 0$, in Widerspruch zur Voraussetzung.

Also haben alle Elemente $\alpha \neq 0$ aus Z dieselbe Ordnung p .

3. p ist Primzahl. Denn wäre $p = r_1 \cdot r_2$ (r_1, r_2 ganz > 1) und $\alpha \neq 0$, so wäre $r_2\alpha = \beta \neq 0$. Aus

$$(r_1 r_2)\alpha = r_1(r_2\alpha) = r_1\beta = 0$$

folgt aber $\beta = 0$. Widerspruch.

Die Zahl p heisse fortan Charakteristik des Z .

4. Gemäss 1), 2), 3) bilden alle Elemente eine abelsche Gruppe in der alle vom Nullelement verschiedenen Elemente dieselbe Primzahlordnung besitzen. Dann folgt aber nach dem Basissatz für abelsche Gruppen, dass die Ordnung der Gruppe notwendig eine Primzahlpotenz p^s sein muss und ferner, dass sich die Gruppe darstellen lässt als direkte Summe von s zyklischen Gruppen der Ordnung p .

Satz 3. Ist die Anzahl der Elemente eines Z eine Primzahl p , so ist Z isomorph dem Restklassenkörper mod. p .

Beweis: Die additive Gruppe ist zyklisch, Ordnung p . Alle Elemente lassen sich darstellen als

$$r\varepsilon \quad (r = 0, 1, 2, \dots, p-1)$$

Diese Elemente bilden einen Körper, den Primkörper jedes Z . Denn sind $r\varepsilon$ und $s\varepsilon$ irgend zwei dieser Elemente, so gilt, wegen M2) und D1)

$$(r\varepsilon)(s\varepsilon) = (rs)\varepsilon = (s\varepsilon)(r\varepsilon)$$

also das Kommutativgesetz, also auch das Rechtsdistributivgesetz. Ebenso einfach beweist man das Assoziativgesetz

Satz 4. In jedem endlichen Z ist die Gleichung

$$\alpha\xi - \beta\xi + \gamma = 0 \quad (1)$$

stets eindeutig lösbar, falls $\alpha \neq \beta$. Das Minuszeichen ist dabei wesentlich! ¹⁾

Beweis: Aus (1) folgt

$$\alpha\xi - \beta\xi = -\gamma \quad (2)$$

Betrachten wir die linke Seite von (2)

$$\alpha\xi - \beta\xi \quad (3)$$

Lässt man ξ alle Elemente von Z durchlaufen, so reproduziert (3) alle Elemente von Z , und zwar jedes genau einmal. Denn sei etwa für $\xi_1 \neq \xi_2$

$$\alpha\xi_1 - \beta\xi_1 = \lambda$$

$$\alpha\xi_2 - \beta\xi_2 = \lambda$$

Durch Subtraktion folgt mit den Additionsgesetzen, R2) und R4)

$$\alpha(\xi_1 - \xi_2) = \beta(\xi_1 - \xi_2)$$

¹⁾ Eine Gleichung der Form $\alpha\xi + \beta\xi + \gamma = 0$ mit $\alpha + \beta \neq 0$ ist im allgemeinen unlösbar! Siehe Anmerkung 3, S. 19.

Da $\xi_1 - \xi_2 \neq 0$, so folgt mit der Kürzungsregel R5) $\alpha = \beta$, was der Voraussetzung widerspricht. Also: Für verschiedene Elemente Z liefert (3) verschiedene Elemente von Z ; also muss es, da Z endlich ist, ein $\xi = \xi_0$ geben, so dass

$$\alpha \xi_0 - \beta \xi_0 = -;$$

ist, d.h. ξ_0 ist die Lösung von (1).

§ 6. Algebraische Charakterisierung des aAS.

Die in § 4 gewonnenen Ergebnisse lassen sich vermöge § 5 wie folgt kurz zusammenfassen:

Satz 1. Entwickelt man im aAS die Hilbertsche Streckenrechnung, so bilden die Strecken ein kleines Desarguessches Zahlensystem Z . Jedem Punkt lässt sich eineindeutig ein geordnetes Streckenpaar aus Z zuordnen und jeder Geraden entspricht eineindeutig eine lineare Streckengleichung (über dem Z) der Form

$$\delta \xi_2 + \alpha \xi_1 + \beta = 0$$

Zwei spezielle Aussagen von Satz 1 heben wir besonders hervor.

Satz 2. Die Anzahl n der Punkte auf einer beliebigen Geraden ist notwendig eine Primzahlpotenz

$$n = p^s \quad (s > 0)$$

Denn die Anzahl der Punkte auf x_1 ist identisch mit der Anzahl der Strecken auf x_1 mit Anfangspunkt O ; diese ist aber gleich der Ordnung des Z , also nach § 5 Satz 2 eine Primzahlpotenz. Zudem liegen (§ 3 Satz 1) auf jeder Geraden gleichviele Punkte.

Daraus folgt weiter in Verbindung mit § 3 Satz 3

Satz 3. Jedes System von Punkten und Geraden, das die Axiome des aAS erfüllt, hat

$$p^{2s} \text{ Punkte und } p^{2s} + p^s \text{ Geraden.}$$

Die angekündigte algebraische Charakterisierung des aAS wird durch den folgenden Satz, die Umkehrung von Satz 1, geleistet.

Satz 4. Jedes endliche kleine Desarguessche Zahlensystem Z ermöglicht den Aufbau einer analytischen Geometrie, in der die Axiome des *AS* I 1—3, IV, E , A_1 erfüllt sind.

Gegeben sei ein beliebiges Z . Dann definieren wir (in Umkehrung der Ergebnisse von § 4):

Ein geordnetes Zahlenpaar (ξ_1, ξ_2) aus Z sei ein „Punkt“. Eine lineare Gleichung (über dem Z) der Form

$$\delta \xi_2 + \alpha \xi_1 + \beta = 0$$

sei eine »Gerade«. ¹⁾ Der Punkt (λ_1, λ_2) »gehört zur« Geraden (1) dann und nur dann, wenn $\delta \lambda_2 + \alpha \lambda_1 + \beta = 0$ ist. Zwei Punkte (ξ_1, ξ_2) und (η_1, η_2) sind genau gleich, wenn $\xi_1 = \eta_1$ und $\xi_2 = \eta_2$ ist. Zwei Geraden $\delta_1 \xi_2 + \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 = 0$ und $\delta_2 \xi_2 + \alpha_2 \xi_1 + \beta_2 = 0$ heißen genaue dann gleich, wenn $\delta_1 = \delta_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$ ist.

Wir überprüfen nun der Reihe nach die Axiome.

Axiome I 1—2. $P(\lambda_1, \lambda_2)$ und $Q(\mu_1, \mu_2)$ seien zwei verschiedene Punkte. Aus den Gleichungen

$$\delta \lambda_2 + \alpha \lambda_1 + \beta = 0 \quad (2a)$$

$$\delta \mu_2 + \alpha \mu_1 + \beta = 0 \quad (2b)$$

folgt durch Subtraktion mit R4)

$$\delta(\lambda_2 - \mu_2) + \alpha(\lambda_1 - \mu_1) = 0 \quad (3)$$

1. Fall. $\lambda_1 - \mu_1 \neq 0$; dann ist notwendig $\delta = \varepsilon$ und damit α vermöge (3) eindeutig festgelegt. Aus (2a) ergibt sich eindeutig

$$\beta = -\delta \lambda_2 - \alpha \lambda_1$$

2. Fall. $\lambda_1 - \mu_1 = 0$; dann ist $\lambda_2 - \mu_2 \neq 0$; also notwendig $\delta = 0$, somit $\alpha = \varepsilon$. Aus (2a) berechnet sich eindeutig β ²⁾. Durch zwei verschiedene Punkte ist also eine Gerade stets eindeutig bestimmt.

Axiom I 3 ist, wie leicht einzusehen, erfüllt.

Axiom IV. Zu zeigen ist, dass zur Geraden

$$g_1 \quad \delta_1 \xi_2 + \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 = 0 \quad (4)$$

durch P eine und nur eine Parallele

$$g_2 \quad \delta_2 \xi_2 + \alpha_2 \xi_1 + \beta_2 = 0 \quad (5)$$

¹⁾ δ bedeutet hier wieder den δ -Operator.

²⁾ Gleichung (2b) liefert wegen (3) dasselbe β .

existiert. Dies ist in der Tat der Fall. Denn aus der Bedingung $g_1 \parallel g_2$ folgt sofort $\delta_1 = \delta_2$.

Ist nun $\delta_1 = \delta_2 = \varepsilon$, so muss wegen § 5 Satz 4 $\alpha_1 = \alpha_2$ sein, und β_2 ist durch P eindeutig festgelegt.

Ist dagegen $\delta_1 = \delta_2 = 0$, so ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \varepsilon$ und β_2 ist wieder eindeutig bestimmt.

Zwei Geraden g_1 und g_2 sind also dann und nur dann parallel, wenn $\delta_1 = \delta_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$ ist.

Axiom E ist trivialerweise erfüllt.

Endlich bleibt noch Δ_1 zu überprüfen.

Um diesen Nachweis zu leisten, betrachten wir vorerst die folgenden Abbildungen (»Translationen«)¹⁾

$$T \quad \xi_1' = \xi_1 + \gamma_1 \quad \xi_2' = \xi_2 + \gamma_2$$

Von ihren Eigenschaften heben wir besonders hervor:

1. Die Abbildungen bilden eine abelsche Gruppe.
2. Es gibt genau eine Abbildung T , die einen gegebenen Punkt P in einen ebenfalls gegebenen Punkt P' transformiert.
3. Jede Abbildung T bildet jede Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade ab. Denn vermöge T geht die Gerade

$$g \quad \delta \xi_2 + \alpha \xi_1 + \beta = 0$$

über in die Gerade

$$g' \quad \delta \xi_2' + \alpha \xi_1' + \beta' = 0$$

wobei $\beta' = \beta - \delta \gamma_2 - \alpha \gamma_1$ ist. Nach dem weiter oben Bewiesenen ist somit $g' \parallel g$.

4. Ist T verschieden von der identischen Abbildung, und bildet sie $P(\lambda_1, \lambda_2)$ auf $P'(\lambda_1', \lambda_2')$ und $Q(\mu_1, \mu_2)$ auf $Q'(\mu_1', \mu_2')$ ab, so ist $PP' \parallel QQ'$.

Beweis: Die nach 2) eindeutig bestimmte Abbildung, die P auf P' abbildet, ist

$$T^* \quad \xi_1' = \xi_1 + (\lambda_1' - \lambda_1) \quad \xi_2' = \xi_2 + (\lambda_2' - \lambda_2)$$

Da T^* den Punkt Q auf Q' abbildet, so ist

$$\mu_1' = \mu_1 + (\lambda_1' - \lambda_1) \quad \mu_2' = \mu_2 + (\lambda_2' - \lambda_2) \quad (1')$$

¹⁾ Auf Grund dieser Abbildungen wäre es leicht möglich, eine Vektorrechnung zu begründen.

Die Gerade PP' heisse

$$\delta \xi_2 + \alpha \xi_1 + \beta = 0 \quad (2')$$

P und P' gehören zu ihr, also

$$\begin{aligned} \delta \lambda_2 + \alpha \lambda_1 + \beta &= 0 \\ \delta \lambda_2' + \alpha \lambda_1' + \beta &= 0 \end{aligned} \quad (3')$$

Analog heisse die Gerade QQ'

$$\delta' \xi_2 + \alpha' \xi_1 + \beta' = 0 \quad (4')$$

Sie enthält Q und Q' als Punkte, also

$$\begin{aligned} \delta' \mu_2 + \alpha' \mu_1 + \beta' &= 0 \\ \delta' \mu_2' + \alpha' \mu_1' + \beta' &= 0 \end{aligned} \quad (5')$$

Aus (1'), (3') und (5') ergeben sich mit R4) die Relationen

$$\begin{aligned} \delta(\lambda_2' - \lambda_2) + \alpha(\lambda_1' - \lambda_1) &= 0 \\ \delta'(\lambda_2' - \lambda_2) + \alpha'(\lambda_1' - \lambda_1) &= 0 \end{aligned} \quad (6')$$

Zwei Fälle sind denkbar:

1. Fall: $\lambda_1' - \lambda_1 \neq 0$, dann ist $\delta' = \delta = \varepsilon$ (Gegenannahme führt auf Widerspruch). Dann folgt aber aus (6') mit R5) $\alpha' = \alpha$.

2. Fall: $\lambda_1' - \lambda_1 = 0$, dann ist $\lambda_2' - \lambda_2 \neq 0$, also $\delta' = \delta = 0$ somit $\alpha' = \alpha = \varepsilon$.

In beiden Fällen ist $\delta' = \delta$ und $\alpha' = \alpha$, also $PP' \parallel QQ'$ wzzw.

. Beweis von A_1 : (Vgl. Fig. 1)

A_1 besagt: Wenn $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$ und $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3$, so ist auch $A_1A_3 \parallel B_1B_3$.

Gemäss 2. gibt es eine Abbildung T_{12} die A_1 auf A_2 abbildet. Wegen 3 und 4. bildet T_{12} auch B_1 auf B_2 ab. Analog gibt es eine Abbildung T_{23} , die A_2 auf A_3 und B_2 auf B_3 abbildet. Weil nach 1) die Abbildungen eine Gruppe bilden, existiert also die Abbildung $T_{13} = T_{23} \cdot T_{12}$, die A_1 auf A_3 und B_1 auf B_3 abbildet. Nach 4. ist dann aber $A_1A_3 \parallel B_1B_3$ wzzw.

Mit dem Nachweis der Gültigkeit von A_1 ist Satz 4 vollständig bewiesen.

Die Gegenüberstellung der Sätze 1 und 4 liefert unmittelbar das zentrale Resultat:

Satz 5. Die gemäss Satz 4 konstruierten Modelle des aAS erschöpfen — bis auf 1-isomorphe — alle möglichen Modelle des aAS.

Damit ist unser Ziel, die *analytische Geometrie im aAS zu begründen*, erreicht. Jede geometrische Frage lässt sich jetzt in eine algebraische übersetzen, vermöge des

» Wörterbuchs »

»Punkt» P	Zahlenpaar	(λ_1, λ_2)
»Gerade» g	Lineare Gleichung	$\delta \xi_2 + a \xi_1 + \beta = 0$
P »gehört zu» g	Erfülltsein der Relation	$\delta \lambda_2 + a \lambda_1 + \beta = 0$
(Alle Elemente aus $\mathbb{Z}$)		

Wir sind nun in der Lage, im aAS Sätze auch analytisch zu beweisen; Auf diese Weise lassen sich z.B. folgende Sätze leicht gewinnen.

Satz 6. Die Diagonalen jedes Parallelogramms schneiden sich stets bzw. nie, je nachdem die Anzahl der Punkte des Modells ungerade bzw. gerade ist.¹⁾

Satz 7. Das Thomsonsche Sechseck schliesst sich. (Fig. 15). D.h. aus $AF \parallel BE \parallel CD$, $BC \parallel AD \parallel FE$ und $AB \parallel FC$ folgt stets $DE \parallel AB$.

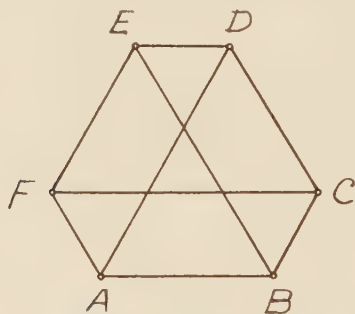


Fig. 15.
Thomsonsches Sechseck.

Satz 8. In Modellen mit gerader Punktzahl gilt ein Spezialfall des Axioms von Desargues (Fig. 16):

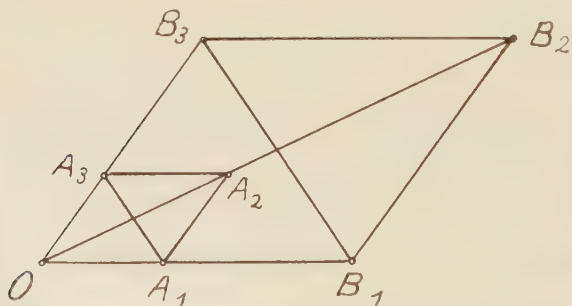


Fig. 16. Spezialfall von Δ_2 .

¹⁾ Die Anzahl der Punkte eines Modells ist gerade bzw. ungerade, je nachdem ob die Charakteristik des zugehörigen $\mathbb{Z}$ gleich 2 bzw. $\neq 2$ ist. (Satz 2).

Wenn in zwei Dreiecken $A_i, B_i (i=1, 2, 3)$ die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch einen Punkt O laufen und ferner $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel A_3B_3$ sowie $A_2A_3 \parallel B_2B_3 \parallel A_1B_1$, so ist auch $A_1A_3 \parallel B_1B_3$.

Der Beweis dieses Satzes lässt sich unmittelbar aus Satz 6 entnehmen.

Satz 9. In Modellen mit ungerader Punktzahl gilt ein Spezialfall des Satzes vom vollständigen Vierseit (Fig. 17):

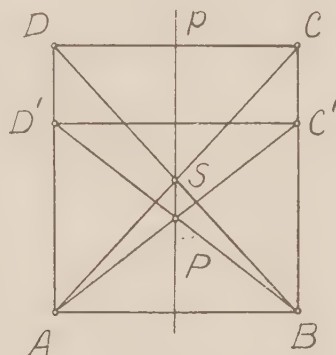


Fig. 17.
Spezialfall des Satzes vom vollständigen Vierseit.

$ABCD$ sei ein beliebiges Parallelogramm und S der Schnittpunkt der Diagonalen. Durch S lege man $p \parallel AD \parallel BC$ und wähle P beliebig auf p . Zieht man die Verbindungsgeraden AP und BP , so treffen diese AD bzw. BC in D' bzw. C' . Dann ist $D'C' \parallel AB \parallel DC$.

§ 7 Beispiele kleiner Desarguesscher Zahlensysteme Unabhängigkeitsbeweise

Nach Erklärung ist sicher jedes Galoisfeld ein kleines Desarguessches Zahlensystem. Jedoch braucht — wie wir zeigen werden — die Multiplikation weder kommutativ, noch assoziativ und auch nicht rechtsdistributiv zu sein. Diese Gesetze sind somit in der im $\mathcal{AAS}$ begründeten Hilbertschen Streckenrechnung nicht beweisbar.

Wir geben ein erstes Beispiel eines Z von $9 = 3^2$ Elementen, die wir durch die Symbole

$$0, \pm 1, \pm r, \pm s, \pm t$$

repräsentieren. 0 und 1 spielen dabei die Rolle von bzw. Null- und Element.

Additionsvorschrift: Bezüglich der Addition bilden die Elemente eine abelsche Gruppe (Typus: direkte Summe zweier Gruppen der Ordnung 3) mit den erzeugenden Relationen:

$$r + s + t = 0$$

$$r + 1 = t, \quad s + 1 = r, \quad t + 1 = s$$

$$x + x + x = 0 \text{ für jedes } x$$

Multiplikationsvorschrift:

$$\left. \begin{array}{l} x0 = 0x = 0 \\ x1 = 1x = x \end{array} \right\} \text{ für jedes } x$$

	-1	r	-r	s	-s	t	-t	
-1	1	-r	r	-s	s	-t	t	
r	-r	-s	s	t	-t	1	-1	
-r	r	-t	t	-1	1	s	-s	z.B. ist st = r
s	-s	1	-1	-t	t	r	-r	
-s	s	t	-t	-r	r	-1	1	
t	-t	s	-s	1	-1	-r	r	
-t	t	-1	1	r	-r	-s	s	

Dass in dem durch diese Vorschriften gegebenen Zahlensystem die Gesetze A 1—4 und M 1—3 erfüllt sind, ist leicht einzusehen. Wir deuten in aller Kürze an, wie man D1 bestätigt: Durchläuft x alle Elemente und ist $a \neq 0$ ein beliebiges aber festes Element, so liefert die Zuordnung $x \rightarrow ax$ stets einen 1-Automorphismus der additiven Gruppe; daraus folgt unmittelbar die Gültigkeit von D1. Das System ist dagegen nicht assoziativ¹⁾, nicht kommutativ und nicht rechtsdistributiv; auch ist im allgemeinen das Rechtsinverse eines Elements nicht zugleich Linksinverses (z.B. ist $sr = 1$, aber $rs \neq t$).

¹⁾ Dagegen gilt $x(xx) + (xx)x = 0$ für alle Elemente $x \neq \pm 1$.

Unser zweites Beispiel stammt von L. E. DICKSON¹⁾ Die Elemente des Z seien hier:

$$0, \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k,$$

Bezüglich der Addition bilden die Elemente wieder eine abelsche Gruppe (vom gleichen Typus wie Beispiel 1.) mit den Relationen

$$\begin{aligned} i + j + k &= 0 \\ i + 1 &= j, & j + 1 &= k, & k + 1 &= i \end{aligned}$$

$$x + x + x = 0 \text{ für jedes } x$$

Als Multiplikationsregeln²⁾ setzen wir fest

$$\begin{aligned} 1x &= x1 = x & 0x &= x0 = 0 \text{ für jedes } x \\ ii &= jj = kk = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ij &= k & jk &= i & ki &= j \\ ji &= -k & kj &= -i & ik &= -j \end{aligned}$$

Ferner sollen die üblichen Vorzeichenregeln gelten!

Das System ist ein kleines Desarguessches Zahlensystem; D1 bestätigt man wie im ersten Beispiel. Jedoch gilt jetzt das Assoziativgesetz und daher gilt Linksinverses = Rechtsinverses. Nicht erfüllt sind dagegen Rechtsdistributiv- und Kommutativgesetz.

Diskussion der Beispiele, Unabhängigkeitsbeweise.

Die vorstehenden Beispiele sind von grundsätzlicher Bedeutung, denn:

- 1. Aus der Existenz kleiner Desarguesscher Zahlensysteme folgt jedenfalls, dass aAS erfüllbar ist. Mit jedem Z lässt sich nämlich gemäss § 6 Satz 4 sofort ein Modell des aAS herstellen.
- 2. Ausserdem bilden sie eine Quelle von *Unabhängigkeitsbeweisen*.
 - a) Aus der Hilbertschen Streckenrechnung in § 4 geht unmittelbar hervor, dass die Gültigkeit des Gesetzes Linksinverses = Rechtsinverses das Bestehen des folgenden Satzes — eines *Spezialfalls des Pappusschen Satzes*³⁾ — nach sich zieht. (Fig. 18).

¹⁾ Göttinger Nachrichten 1905; sog. »einseitig-distributives Zahlensystem«.

²⁾ Die acht Elemente $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ bilden bezüglich der Multiplikation die Quaternionengruppe!

³⁾ Vgl. § 9 Satz 6.

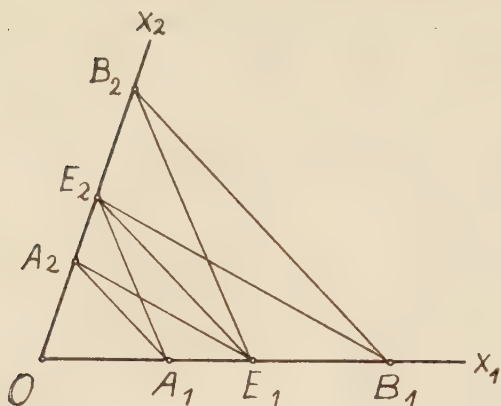


Fig. 18. Π_1 Spezialfall des Satzes von Pappus.

Π_1 : Sind E_1, A_1, B_1 und E_2, A_2, B_2 je drei Punkte auf x_1 bzw. x_2 , und ist $E_1E_2 \parallel A_1A_2 \parallel B_1B_2$ und $E_1A_2 \parallel B_1B_2$, so ist auch $A_1E_2 \parallel E_1B_2$.

Da in unserm ersten Beispiel das Linksinverse im allgemeinen verschieden ist vom Rechtsinversen, so folgt:

Satz 1. Π_1 und a fortiori der Pappussche Satz sind im aAS unbeweisbar.

Man beachte ferner, dass Π_1 im zweiten Beispiel erfüllt ist.

b) Der im § 6 Satz 8 erwähnte Spezialfall des Axioms von Desargues gilt nicht allgemein. In der Tat: in jeder der vermöge unserer zwei Beispiele konstruierten Geometrien ist er nicht erfüllt (wovon man sich leicht überzeugt), also

Satz 2. Δ_2 ist im aAS ebenfalls nicht beweisbar.

Satz 2 rechtfertigt die Unterscheidung zwischen aAS und AAS .

c) Von Interesse ist auch folgende Feststellung (Fig. 19): Es seien A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die Eckpunkte eines Parallelogramms mit den Diagonalen $d_1 = A_1A_3$ und $d_2 = A_2A_4$. Wählt man auf d_1 einen beliebigen Punkt B_1 und bestimmt sukzessive

B_2 auf d_2 , so dass $B_1B_2 \parallel A_1A_2$
 B_3 auf d_1 , so dass $B_2B_3 \parallel A_2A_3$
 B_4 auf d_2 , so dass $B_3B_4 \parallel A_3A_4$
 und
 C_1 auf d_1 , so dass $B_4C_1 \parallel A_4A_1$,

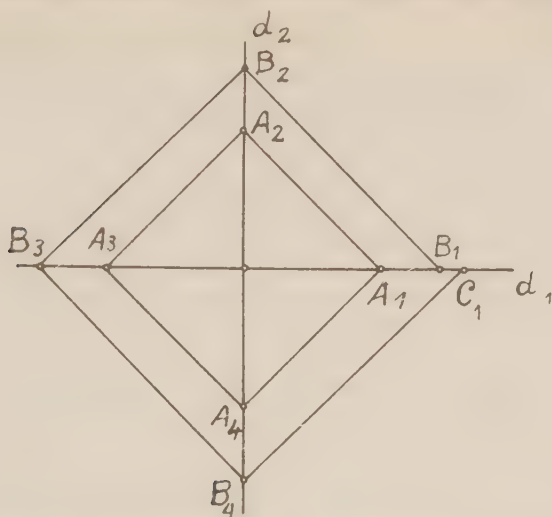


Fig. 19.

so ist im allgemeinen $C_1 \neq B_1$, d.h. die Punkte B_i ($i = 1, 2, 3, 4$) bilden kein Parallelogramm! Zum Beweis wähle man etwa (bezugnehmend auf unser erstes Beispiel) $A_1(1,0)$, $A_2(0, r)$, $A_3(-1,0)$, $A_4(0, -r)$ und $B_1(t, 0)$; dann erhält man der Reihe nach $B_2(0,1)$, $B_3(-s, 0)$, $B_4(0, -t)$ und $C_1(r, 0)$; also ist $C_1 \neq B_1$, wie behauptet.

d) Wie im § 4 dargelegt wurde, erfüllen die Koordinaten aller Punkte einer Geraden eine lineare Gleichung der Form

$$\delta \xi_2 + \alpha \xi_1 + \beta = 0$$

Dagegen stellt, wie wir hier zeigen wollen, eine lineare Gleichung vom Typus

$$a_2 \xi_2 + a_1 \xi_1 + \beta = 0$$

mit $a_2 \neq \varepsilon$, $a_2 \neq 0$ im allgemeinen keine Gerade dar. In der Tat: Beziehen wir uns wieder auf unser erstes Beispiel. Die Gerade

$$\xi_2 + r \xi_1 - t = 0$$

läuft durch die Punkte $P(s, 0)$, $Q(0, t)$ und $R(r, -r)$, wie man an Hand der Additions- und Multiplikationsregeln sofort nachrechnet. Die lineare Gleichung

$$s \xi_2 + (-t) \xi_1 - r = 0$$

wird ebenfalls durch P und Q erfüllt, dagegen nicht durch R !. Die letzte Gleichung kann somit keine Gerade darstellen (Widerspruch gegen I 1, 2)¹⁾

¹⁾ Auch eine Gleichung der Gestalt $\xi_2 = a \xi_1$ stellt im allgemeinen keine Gerade dar.

§ 8 Die Struktur der Modelle des AAS.

Zum AAS übergehend, stellen wir die zwei folgenden Sätze an die Spitze:

Satz 1. Δ_2 ist im AAS umkehrbar.¹⁾

Satz 2. Δ_1 ist im AAS beweisbar.

Beweis: (für beide Sätze): Die Gegenannahme führt mit Δ_2 zum Widerspruch.

Aus Satz 2 entnehmen wir die wichtige Feststellung, dass *jeder Satz des aAS auch im AAS gilt*, (aber nicht umgekehrt).

Entwickelt man also im AAS die Hilbertsche Streckenrechnung, so bilden die Strecken jedenfalls ein kleines Desarguessches Zahlensystem. Zusätzlich lässt sich aber zeigen:

Satz 3. Im AAS ist die Streckenmultiplikation auch assoziativ und rechtsdistributiv.

Der Beweis sei hier übergangen, da er sich wörtlich aus den »Grundlagen« übertragen lässt²⁾.

Nach Definition ist ein kleines Desarguessches Zahlensystem, in dem Assoziativ- und Rechtsdistributivgesetz gelten, ein Schiefkörper, in unserem Fall also speziell ein *endlicher* Schiefkörper.

Nun ist, nach einem bekannten Satz von J. H. MACLAGAN — WEDDERBURN und E. WITT³⁾, jeder endliche Schiefkörper ein Körper; also ein Galoisfeld. Somit:

Satz 4. In der im AAS begründeten Hilbertschen Streckenrechnung, bilden die Strecken ein Galoisfeld.

Darin ist enthalten:

Satz 5. Im AAS ist die Streckenmultiplikation kommutativ.

Geometrisch drückt das Kommutativgesetz der Streckenrechnung das Bestehen des Pappusschen Satzes aus, wie man unmittelbar aus der Multiplikationsvorschrift (§ 4) entnimmt; also

¹⁾ Des weiteren verstehen wir unter Δ_2 sowohl das Axiom als auch dessen Umkehrung.

²⁾ S. 92 bzw. S. 95.

³⁾ Vgl. etwa A. Speiser, Die Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, Berlin, 1937.

Satz 6. Im AAS gilt der *Pappussche Satz*:

Π_2 : Es seien A_1, E_1, B_1 bzw. A_2, P_2, B_2 je drei von O verschiedene Punkte auf x_1 bzw. x_2 . Ist dann $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ und $E_1A_2 \parallel B_1P_2$ so ist auch $A_1P_2 \parallel E_1B_2$. (Fig. 20).

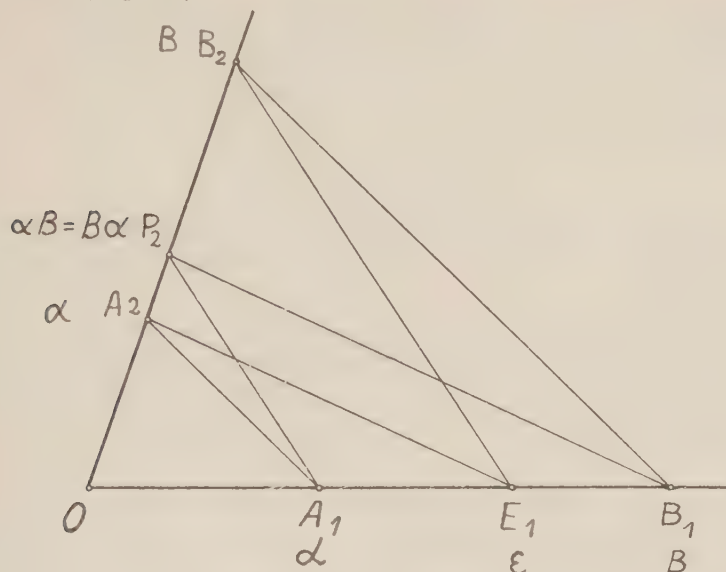


Fig. 20. Π_2 Satz von Pappus.

Wie aus den Hilbertschen Untersuchungen zum Pappusschen Satz¹⁾ hervorgeht, ist Satz 6 wesentlich durch das Endlichkeitsaxiom E bedingt.

Was die Form der Geradengleichung im AAS betrifft, lässt sich folgendes zeigen:

Satz 7.

1. Im AAS entspricht jeder Streckengleichung der Form

$$\alpha \xi_1 + \beta \xi_2 + \gamma = 0 \quad (1)$$

(wo α und β nicht beide Null sind) eine Gerade; umgekehrt lässt sich jede Geradengleichung auf diese Form bringen.

2. Zwei Streckengleichungen der beschriebenen Art

$$\begin{aligned} a_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 + \gamma_1 &= 0 \\ a_2 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \gamma_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

¹⁾ »Grundlagen«, Satz 58, S. 105..

stellen genau dann dieselbe Gerade dar, wenn ein ϱ existiert, so dass

$$\alpha_2 = \varrho \alpha_1, \beta_2 = \varrho \beta_1, \gamma_2 = \varrho \gamma_1 \quad (3)$$

Beweis: 1. Mit Rücksicht auf die Körperaxiome kann (1) entweder auf die Form

$$\xi_2 + \alpha' \xi_1 + \beta' = 0 \quad (4a)$$

oder

$$\xi_1 + \beta' = 0 \quad (4b)$$

gebracht werden. Jeder dieser Streckengleichungen entspricht aber nach § 4 Satz 9 eine Gerade. Die Umkehrung folgt ebenfalls auf Grund der Körperaxiome.

2. Ist die Bedingung (3) erfüllt, so ist die Behauptung sicher richtig. Stellen umgekehrt die beiden Streckengleichungen (2) dieselbe Gerade dar, so lassen sich beide entweder auf die Gestalt (4a) oder (4b) mit denselben Koeffizienten bringen. Daraus folgt das Bestehen von (3).

Unter Beachtung von § 4 und der vorstehenden Sätze 4 und 7, lassen sich unsere Resultate bezüglich des AAS wie folgt zusammenfassen:

Satz 8. Bei der im AAS entwickelten Hilbertschen Streckenrechnung bilden die Strecken ein Galoisfeld. Jedem Punkt kann (nach Wahl eines Koordinatensystems) umkehrbar eindeutig ein Streckenpaar zugeordnet werden. Ebenso gehört zu jeder Geraden eine lineare Streckengleichung (1) und umgekehrt, wobei zwei Streckengleichungen (2) dann und nur dann dieselbe Gerade darstellen, wenn (3) erfüllt ist.

Dieser Satz ist umkehrbar in folgendem Sinn.

Satz 9. Jedes Galois-Feld GF ermöglicht den Aufbau einer analytischen Geometrie, in der die sämtlichen Axiome des AAS erfüllt sind.

Beweis: Zu zeigen ist, dass man mit jedem Galoisfeld ein Modell des AAS herstellen kann.

GF sei ein beliebiges Galoisfeld, dessen Elemente wir auch mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen. Ein geordnetes Zahlenpaar (ξ_1, ξ_2) aus dem GF sei ein »Punkt«. Eine lineare Gleichung der Form

$$\alpha \xi_1 + \beta \xi_2 + \gamma = 0 \quad (5)$$

über dem GF (α und β nicht beide Null) sei eine »Gerade«. Zwei Punkte (ξ_1, ξ_2) und (η_1, η_2) sind genau dann gleich, wenn $\xi_1 = \eta_1$ und $\xi_2 = \eta_2$. Zwei Geraden $\alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 + \gamma_1 = 0$ und $\alpha_2 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \gamma_2 = 0$ heissen

gleich, wenn ein $\varrho \in \text{GF}$ existiert, so dass $\alpha_2 = \varrho\alpha_1$, $\beta_2 = \varrho\beta_1$ und $\gamma_2 = \varrho\gamma_1$. Der Punkt (λ_1, λ_2) gehört zur Geraden (5) dann und nur dann, wenn $\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 + \gamma = 0$ ist.

Auf die Überprüfung der Axiome können wir verzichten.¹⁾ Sie sind erfüllt, denn die Theorie der linearen Gleichungen lässt sich auf jeden Körper ohne weiteres übertragen.

Durch Verbindung der Sätze 8 und 9 erhalten wir eine endgültige Antwort auf die Frage nach den Modellstrukturen.

Satz 10. Die in Satz 9 konstruierten Modelle sind — bis auf 1-isomorphe — alle Modelle des AAS.

Damit ist die Struktur der Modelle des AAS zurückgeführt auf die bekannte Struktur der Galoisfelder.

§ 9 Ueber Nicht-Pappussche Geometrien.

Dem in § 8 bewiesenen Satz 6 lässt sich eine interessante Deutung geben.

Nennen wir eine Geometrie »Pappussch« (»Desarguessch«), wenn in ihr mindestens die Axiome I 1 — 3, IV und Π_2 (bzw. Δ_2) gelten. Dagegen heiße sie *Nicht-Pappussch* (= *Nicht-Desarguessch*), wenn wieder mindestens die Axiome I 1 — 3, IV erfüllt sind, jedoch Π_2 (bzw. Δ_2) nicht gilt.

Dann behaupten wir

Satz 1. Jede Desarguessche und Nicht-Pappussche Geometrie hat notwendig unendlich viele Punkte und Geraden; oder: Es gibt keine endlichen Desarguesschen und zugleich Nicht-Pappusschen Geometrien.

Beweis: Gesetzt, dies wäre nicht der Fall. Dann gäbe es eine *endliche* Desarguessche und Nicht-Pappussche Geometrie, was im Widerspruch zu § 8, Satz 6 steht.

Beachtet man noch, dass aus den ebenen und räumlichen Verknüpfungssaxiomen I 1 — 8 und dem versächrften Parallelenaxiom IV*²⁾ Δ_2 als Satz gefolgert werden kann, so lässt sich der vorstehende Satz wie folgt formulieren:

¹⁾ Es genügt übrigens Δ_2 nachzuprüfen, denn die übrigen Axiome sind nach § 6 schon in einem kleinen Desarguesschen Zahlensystem erfüllt.

²⁾ Vergleiche den nächsten §.

Satz 2. Jede Nicht-Pappussche Geometrie, in der die Axiome I 1 — 8 und IV* gelten, ist notwendig nicht endlich. ¹⁾

Bezüglich der Begriffe Pappussch und Desarguessch sei noch folgendes angemerkt:

1. Jede Pappussche Geometrie ist Desarguessch. Denn, wie G. HESSENBERG gezeigt hat, ist A_2 aus II_2 unter Verwendung der Axiome I 1 — 3, IV* beweisbar. ²⁾

2. Es gibt endliche aber auch nicht endliche Nicht-Desarguessche und zugleich Nicht-Pappussche Geometrien. Eine solche endliche Geometrie ist die in § 7 vermöge des kleinen Desarguesschen Zahlensystems (1. oder 2. Beispiel) konstruierte. Ein nicht endliches Beispiel ³⁾ ist von F. R. MOULTON angegeben worden.

§ 10 Das räumliche AAS.

Als *räumliches AAS* definieren wir das System der Axiome

$$I\ 1 - 8, IV^*, E$$

Dabei bedeuten

I 1 — 8 Verknüpfungsaxiome ⁴⁾

I 1 — 3 Ebene Verknüpfungsaxiome (s. § 1).

I 4 Zu irgend drei nicht in ein und derselben Geraden liegenden Punkten A,B,C gibt es stets eine Ebene I , die mit jedem der drei Punkte A,B,C zusammengehört. Zu jeder Ebene gibt es stets einen mit ihr zusammengehörigen Punkt ⁵⁾.

I 5 Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten A,B,C gibt es nicht mehr als eine Ebene, die mit jedem der drei Punkte A,B,C zusammengehört.

I 6 Wenn zwei Punkte A,B einer Geraden a in einer Ebene I liegen, so liegt jeder Punkt von a in der Ebene.

¹⁾ Ein Beispiel einer solchen Geometrie findet man in den »Grundlagen» § 33.

²⁾ Math. Annalen, Bd. 61; auch »Grundlagen» S. 111.

³⁾ Trans. Amer. Math. Soc. 1902; auch »Grundlagen» S. 85.

⁴⁾ »Grundlagen» S. 3 — 4.

⁵⁾ Ebenen bezeichnen wir mit grossen griechischen Buchstaben.

- I 7 Wenn zwei Ebenen Γ_1, Γ_2 einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein.
 I 8 Es gibt vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.

IV* *Verschärftes Parallelenaxiom* ¹⁾

Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt ausserhalb a ; dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene eine und nur eine Gerade, die durch A geht und a nicht schneidet.

E *Endlichkeitsaxiom* (s. § 1).

Ziel der axiomatischen Untersuchung des räumlichen AAS ist wieder die explizite Bestimmung der Modell-Strukturen.

Die elementaren Sätze, die aus den Axiomen I 1 — 8, IV* folgen, setzen wir des weiteren als bekannt voraus.

Dass das räumliche AAS eine räumliche Erweiterung des AAS ist, zeigt der folgende, grundlegende

Satz 1. Die Punkte und Geraden jeder Ebene des räumlichen AAS erfüllen die Axiome des AAS.

Beweis: Γ sei eine beliebige Ebene. Für ihre Punkte und Geraden gelten trivial die Axiome I 1 — 3, IV und E. Aber auch A_2 ist erfüllt. Denn bekanntlich ist der ebene Desarguessche Satz (von dem A_2 einen Spezialfall darstellt) unter alleiniger Benützung der Axiome I 1 — 8 und IV* beweisbar.

Somit gelten sämtliche Folgerungen des AAS und a fortiori des aAS in jeder Ebene.

Aus dieser letzten Bemerkung folgt sofort, in Verbindung mit der Tatsache, dass sich jede Gerade als Schnittgerade zweier Ebenen darstellen lässt:

Satz 2. Zu jeder Geraden und zu jeder Ebene gehören bzw. gleichviele Punkte: die Anzahl n der Punkte einer Geraden ist notwendig eine Primzahlpotenz

$$n = p^s (s > 0)$$

Daraus folgt weiter durch eine elementare Abzählung

¹⁾ »Grundlagen« S. 83.

Satz 3. Falls zu einer Geraden $n = p^s$ Punkte gehören, so besteht das Modell des räumlichen AAS aus

$$\begin{array}{rcl} p^{3s} & \text{Punkten} \\ p^{2s}(p^{2s} + p^s + 1) & \text{Geraden} \\ p^s(p^{2s} + p^s + 1) & \text{Ebenen.} \end{array}$$

Zu jeder Ebene gehören p^{2s} Punkte; durch jeden Punkt laufen $p^{2s} + p^s + 1$ Geraden und ebensoviele Ebenen; durch jede Gerade gehen $p^s + 1$ Ebenen.

Übertragung der Hilbertschen Streckenrechnung auf den Raum.

$x_i (i = 1, 2, 3)$ seien drei feste, nicht in einer Ebene liegende Geraden mit gemeinsamen Schnittpunkt O und $E_i \neq O$ seien drei feste Punkte auf bzw. x_i . (Fig. 21).

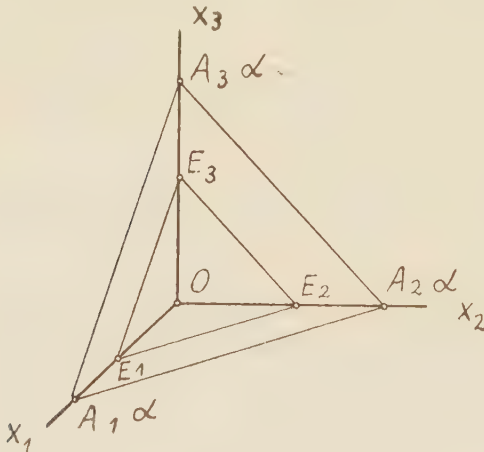


Fig. 21.
Definition der Streckengleichheit.

Die Geraden x_i heißen »Koordinatenachsen« (K -Achsen); O und E_i bzw. »Ursprung« und »Einheitspunkte«. Das ganze System nennen wir ein »räumliches Koordinatensystem«. Die durch je zwei K -Achsen bestimmten Ebenen heißen »Koordinatenebenen« (K -Ebenen). Endlich heiße die Ebene durch E_1, E_2, E_3 »Einheitsebene«. Sie trifft die K -Ebenen in den drei »Einheitsgeraden« E_1E_2, E_2E_3, E_3E_1 .

Alle Strecken mit Anfangspunkt O und Endpunkt auf einer K -Achse bezeichnen wir wieder mit kleinen griechischen Buchstaben (ev. mit Indizes versehen) und definieren:

Drei Strecken OA_i auf bzw. $x_i (i = 1, 2, 3)$ heißen »gleich«,

$$OA_i = \alpha$$

wenn die Ebene A durch die Punkte A_i zur Einheitsebene parallel ist.

Dann sind auch die Schnittgeraden A_1A_2 , A_2A_3 und A_3A_1 von A mit den K -Ebenen zu den entsprechenden Einheitsgeraden E_1E_2 , E_2E_3 und E_3E_1 parallel.

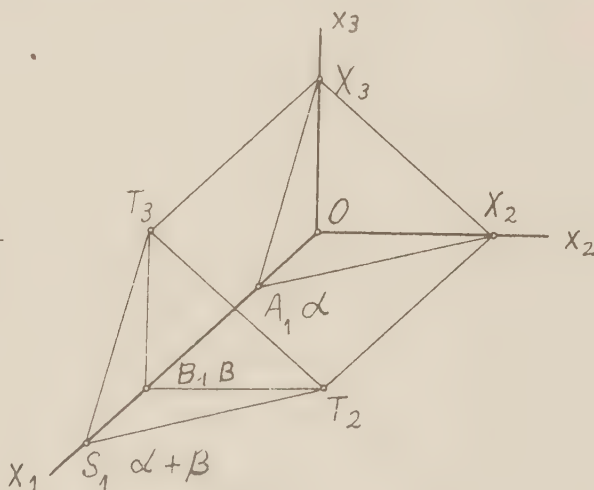
In jeder K -Ebene gelten die Axiome des AAS. Beachtet man nun, dass die obige Definition der Streckengleichheit in jeder K -Ebene mit der entsprechenden ebenen-Definition in § 4 übereinstimmt, so folgt: In jeder K -Ebene kann die Hilbertsche Streckenrechnung entwickelt werden. Addition und Multiplikation werden gemäss § 4 in jeder K -Ebene definiert. Nach § 8 Satz 4 bilden die Strecken in jeder K -Ebene ein Galoisfeld.

Addition und Multiplikation sind aber von der speziellen K -Achse und K -Ebene unabhängig. Wir zeigen nämlich:

Hilfssatz: Sind $OA_i = \alpha$ und $OB_i = \beta$ zwei Strecken auf x_i , so ist ihre Summe OS_i (ihre Produkt OP_i) unabhängig davon, ob man sie (es) in der K -Ebene $x_i x_{i+1}$ oder $x_i x_{i-1}$ bildet (Indizes mod. 3 reduzieren, $x_0 = x_3$). (Fig. 22).

Fig. 22.

Unabhängigkeit der Streckenaddition von der K -Ebene.



Beweis: (für die Summe; der Einfachheit halber setzen wir $i = 1$). Nach Additionsvorschrift ist $X_2T_2 \parallel x_1 \parallel X_3T_3$, $B_1T_2 \parallel x_2$, $B_1T_3 \parallel x_3$. Legt man $T_2S_1 \parallel X_2A_1$, so ist $\overline{OS_1} = \alpha + \beta$. Zu beweisen ist $T_3S_1 \parallel X_3A_1$. Aus $X_2T_2 \parallel x_1 \parallel X_3T_3$ folgt $X_2T_2 \parallel X_3T_3$ d.h. X_2, X_3, T_3, T_2 liegen in einer Ebene Γ . Da $B_1T_2 \parallel x_2$ und $B_1T_3 \parallel x_3$, so ist die Ebene $B_1T_2T_3$ parallel der K -Ebene x_2x_3 . Also sind X_2X_3 und T_2T_3 als Schnittgeraden der Ebene Γ mit den parallelen Ebenen x_2x_3 und $B_1T_2T_3$ selbst parallel: $T_2T_3 \parallel X_2X_3$. Nach Konstruktion ist $X_2A_1 \parallel T_2S_1$; also sind die Ebenen $S_1T_2T_3$ und $A_1X_2X_3$ parallel. Ihre Schnittgeraden T_3S_1 und X_3A_1 mit der K -Ebene x_1x_3 sind somit parallel: $T_3S_1 \parallel X_3A_1$.

Ähnlich verläuft der Beweis für die Multiplikation.

Nach § 4 Hilfssatz ist die Addition bezüglich der K -Achsen x_1 und x_2 vertauschbar; dies gilt analog für irgend zwei K -Achsen. Mit A_2 beweist man leicht, dass auch die Multiplikation bezüglich zweier K -Achsen vertauschbar ist. In Verbindung mit dem Hilfssatz folgt daraus.

Satz 4. Ist $\overline{OA_i} = \alpha$ und $\overline{OB_i} = \beta$ ($i = 1, 2, 3$) und bildet man auf jeder K -Achse x_i die Summe $\overline{OS_i}$ (das Produkt $\overline{OP_i}$) in irgend einer K -Ebene, so liegen die Punkte $S_i(P_i)$ wieder in einer Parallelebene zur Einheitssebene.

Koordinaten, Ebenengleichung und Geradengleichung.

Koordinaten: Sei P ein beliebiger Punkt. Die Parallelebenen durch P zu den drei K -Ebenen treffen die K -Achsen x_1, x_2, x_3 in bzw. P_1, Q_2, R_3 . Dann heissen die Strecken

$$\overline{OP_1} = \xi_1, \overline{OQ_2} = \xi_2, \overline{OR_3} = \xi_3$$

die »*Koordinaten*« von P . Aus der Eineindeutigkeit der Konstruktion entnimmt man:

Satz 5. Nach Wahl eines räumlichen Koordinatensystems gehört zu jedem Punkt P umkehrbar eindeutig ein geordnetes Streckentripel (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , seine Koordinaten; in Zeichen $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Ebenengleichung.

Satz 6 Die Koordinaten (ξ_1, ξ_2, ξ_3) aller Punkte einer Ebene genügen einer linearen Streckengleichung

$$\alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \gamma\xi_3 + \delta = 0 \quad (1)$$

in der nicht gleichzeitig α, β und γ verschwinden.¹⁾

Umgekehrt: Zu jeder Streckengleichung der Form (1) gehört eine und nur eine Ebene, die die vorgegebene Streckengleichung zur Ebenengleichung hat.²⁾

¹⁾ δ bedeutet hier und im Folgenden stets eine beliebige Strecke.

²⁾ Die Formulierung von Satz 5 (und damit auch der nachfolgende Beweis) macht wesentlichen Gebrauch von Satz 4. Auf Grund dieses Satzes ist es nämlich möglich (nach Wahl eines K -Systems) von Strecken-Addition und Multiplikation schlechtweg zu reden, ohne Bezugnahme auf eine bestimmte K -Achse oder K -Ebene.

*Beweis:*¹⁾ (Fig. 23). Jede Ebene trifft mindestens eine K -Achse in genau einem Punkt. Angenommen dies sei für die Ebene I die K -Achse x_3 . Dann schneidet sie die K -Ebenen x_1x_3 und x_2x_3 in den Schnittgeraden s_{13} bzw. s_{23} und Z ist ihr gemeinsamer Punkt auf x_3 . Ihre Gleichungen lassen sich wie folgt schreiben:

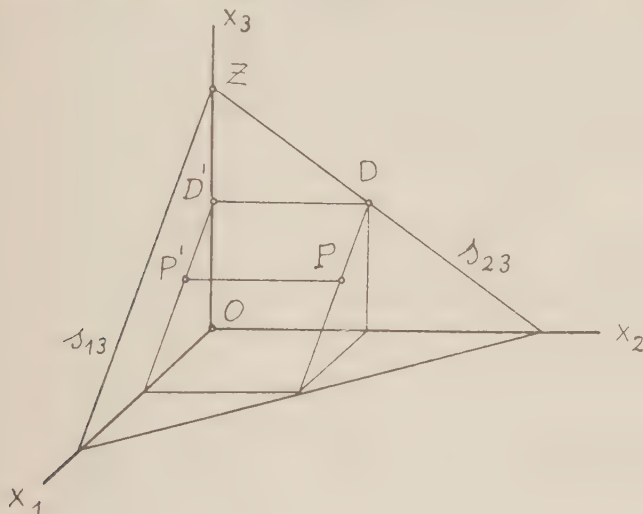


Fig. 23.

Gleichung der Ebene.

$$s_{13} \quad a\xi_1 + \gamma\xi_3 + \delta = 0 \quad (2a)$$

$$s_{23} \quad \beta\xi_2 + \gamma\xi_3 + \delta' = 0 \quad (2b)$$

Der Koeffizient von ξ_3 darf in (2a) und (2b) als gleich angenommen werden; denn erstens ist er in beiden Gleichungen sicher $\neq 0$ (sonst wäre $s_{13} \parallel x_3$ oder $s_{23} \parallel x_3$, was der Voraussetzung widerspricht) und zweitens darf gemäss § 8 Satz 7 jede Gleichung mit einer von Null verschiedenen Strecke multipliziert werden. Ferner ist

$$\delta' = \delta \quad (3)$$

Denn berechnet man aus s_{13} und s_{23} die Koordinaten von Z , so erhält man bzw. $\xi_1 = \xi_2 = 0, \xi_3 = \delta \cdot \gamma^{-1}$ und $\xi_1 = \xi_2 = 0, \xi_3 = \delta' \gamma^{-1}$ also $\delta \gamma^{-1} = \delta' \gamma^{-1}$, woraus wegen der Körperaxiome sofort (3) folgt.

Sei nun $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ein beliebiger Punkt von I . Die durch P gelegte Parallelebene zur K -Ebene x_1x_3 trifft I in einer Schnittgeraden $s \parallel s_{13}$. Der Durchstosspunkt von s mit der K -Ebene x_2x_3 heisse D mit den Koordinaten $(0, \xi_2, \xi_3^*)$; er liegt auf s_{23} ; folglich gilt mit (2b) und (3)

$$\begin{aligned} \beta\xi_2 + \gamma\xi_3^* + \delta &= 0 \\ \xi_3^* &= -\beta\gamma^{-1}\xi_2 - \delta\gamma^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

also

¹⁾ Der Beweis ist nicht so »elegant«, wie in der üblichen analytischen Geometrie, weil die Kongruenz nicht zur Verfügung steht

Durch $s \parallel s_{13}$ lege man sodann eine Hilfsebene H parallel x_2 . Sie trifft die K -Ebene x_1x_3 in einer Schnittgeraden $s' \parallel s_{13}$. Ihre Gleichung lässt sich also gemäss (2a) in der Form

$$\alpha \xi_1 + \gamma \xi_3 + \bar{\delta} = 0 \quad (5)$$

schreiben. Die Parallelprojektionen P' und D' von P und D auf die K -Ebene $x_1x_3 (PP' \parallel DD' \parallel x_2)$ liegen auf s' , und ihre Koordinaten sind $P'(\xi_1, 0, \xi_3)$, $D'(0, 0, \xi_3^*)$. Also gilt mit (5)

$$\alpha \xi_1 + \gamma \xi_3 + \bar{\delta} = 0 \quad (6a)$$

$$\gamma \xi_3^* + \bar{\delta} = 0 \quad (6b)$$

Eliminiert man aus (6a) vermöge (6b) $\bar{\delta}$ und berücksichtigt (4), so erhält man die Relation

$$\alpha \xi_1 + \beta \xi_2 + \gamma \xi_3 + \delta = 0 \quad (7)$$

(7) gilt für alle Punkte von Γ . Denn die Koeffizienten α, β, γ und auch δ sind von der speziellen Wahl von P unabhängig (Vergl. (2a), (2b) und (3)); ausserdem ist $\gamma \neq 0$. (7) hat also die im Satz behauptete Form¹⁾.

Die Umkehrung ergibt sich so: Es sei eine Gleichung (1) vorgegeben; ferner sei etwa $\gamma \neq 0$. Dann bestimme man die Punkte, die (1) genügen und zur K -Ebene x_1x_3 gehören. Diese liegen auf der Geraden

$$\alpha \xi_1 + \gamma \xi_3 + \delta = 0 \quad (8)$$

Ebenso liegen die Punkte, die (1) erfüllen und zur K -Ebene x_2x_3 gehören auf der Geraden

$$\beta \xi_2 + \gamma \xi_3 + \delta = 0 \quad (9)$$

Die Geraden (8) und (9) treffen sich in einem Punkt der x_3 -Achse. Die durch sie gelegte Ebene hat nach dem obigen Beweis (1) zur Ebenengleichung.

Satz 7. Zwei Ebenen

$$\alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 + \gamma_1 \xi_3 + \delta_1 = 0 \quad (10a)$$

$$\alpha_2 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \gamma_2 \xi_3 + \delta_2 = 0 \quad (10b)$$

¹⁾ Ein Punkt $Q(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, der nicht zu Γ gehört, genügt (7) nicht. Denn, wegen $\gamma \neq 0$, gibt es einen Punkt $Q'(\eta_1', \eta_2', \eta_3')$ mit $\eta_1' = \eta_1, \eta_2' = \eta_2, \eta_3' \neq \eta_3$, der zu Γ gehört und somit (7) erfüllt. Dann kann aber Q der Gleichung (7) offensichtlich nicht genügen.

sind dann und nur dann parallel, wenn eine Strecke ϱ existiert, so dass

$$\alpha_2 = \varrho\alpha_1, \beta_2 = \varrho\beta_1, \gamma_2 = \varrho\gamma_1 \quad (11)$$

ist. Ist überdies

$$\delta_2 = \varrho\delta_1 \quad (12)$$

so sind die Ebenen identisch.

Beweis: 1. Falls die Relation (11) bzw. die Relationen (11) und (12) erfüllt sind, sind die Behauptungen mit Rücksicht auf die Körperaxiome klar.

2. Sind andererseits die Ebenen (10a) und (10b) parallel bzw. identisch, so betrachte man ihre Schnittgeraden mit den K -Ebenen. Diese sind parallel bzw. identisch. In Verbindung mit § 8 Satz 7 ergeben sich sofort die behaupteten Relationen.

Geradengleichung.

Satz 8. Die Koordinaten (ξ_1, ξ_2, ξ_3) aller Punkte einer Geraden erfüllen ein System von zwei linearen Streckengleichungen.

$$\begin{aligned} \alpha_1\xi_1 + \beta_1\xi_2 + \gamma_1\xi_3 + \delta_1 &= 0 \\ \alpha_2\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \gamma_2\xi_3 + \delta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

wo weder $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ noch $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ gleichzeitig verschwinden und ausserdem die Relationen (11) nicht erfüllbar sind.

Umgekehrt gehört zu jedem solchen System eine und nur eine Gerade.

Beweis: Der erste Teil des Satzes ergibt sich in Verbindung mit den Sätzen 6 und 7 sofort aus der Tatsache, dass sich jede Gerade als Schnittgerade zweier (nicht parallelen) Ebenen darstellen lässt.

Die Umkehrung folgt daraus, dass zwei nicht parallele Ebenen stets genau eine Gerade gemein haben.

Wir fassen unsere bisherigen Ergebnisse wie folgt kurz zusammen.

Satz 9. Im räumlichen AAS lässt sich eine räumliche Hilbertsche Streckenrechnung entwickeln. Die Strecken bilden ein Galoisfeld. Nach Wahl eines Koordinatensystems gehört zu jedem Punkt eineindeutig ein Streckentripel; jeder Ebene und jeder Geraden lässt sich eine lineare Streckengleichung (1) bzw. ein Paar von linearen Streckengleichungen (13) zuordnen und umgekehrt.

Dieser Satz ist umkehrbar:

Satz 10. Jedes Galoisfeld GF gestattet den Aufbau einer analytischen Geometrie in der alle Axiome des räumlichen AAS erfüllt sind.

Beweis: Die Elemente des vorgegebenen Galoisfeldes GF bezeichnen wir auch mit kleinen griechischen Buchstaben und definieren (in Umkehrung unserer obigen Ergebnisse):

Ein geordnetes Zahlentripel (ξ_1, ξ_2, ξ_3) aus dem GF sei ein »Punkt«. Eine lineare Gleichung der Form (1) über dem GF sei eine »Ebene«; endlich sei ein System von zwei linearen Gleichungen der Form (13) eine »Gerade«.

Zwei Punkte (ξ_1, ξ_2, ξ_3) und (η_1, η_2, η_3) heissen genau dann gleich, wenn $\xi_1 = \eta_1, \xi_2 = \eta_2, \xi_3 = \eta_3$ ist. Zwei Ebenen (10a) und (10b) heissen gleich dann und nur dann, wenn ein $\varrho \in GF$ existiert, so dass die Relationen (11) und (12) erfüllt sind.

Ein Punkt $(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$ »gehört« zur Ebene (1), wenn die Relation

$$\alpha \xi_1^0 + \beta \xi_2^0 + \gamma \xi_3^0 + \delta = 0$$

erfüllt ist; er »gehört« zur Geraden (13), wenn die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 \xi_1^0 + \beta_1 \xi_2^0 + \gamma_1 \xi_3^0 + \delta_1 &= 0 \\ \alpha_2 \xi_1^0 + \beta_2 \xi_2^0 + \gamma_2 \xi_3^0 + \delta_2 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Endlich gelten zwei Geraden als gleich, falls dieselben Punkte zu ihnen gehören.

Da die Theorie der linearen Gleichungen auf jeden kommutativen Körper übertragbar ist, erkennt man sofort, dass auf Grund unserer Definitionen die sämtlichen Axiome erfüllt sind.

Die Verbindung der beiden letzten Sätze liefert

Satz 11. Die gemäss Satz 10 konstruierten Modelle sind — bis auf 1-Isomorphie — die einzigen Modelle des räumlichen AAS.

Die Struktur der Modelle ist damit eindeutig festgelegt und wieder auf die Struktur der Galoisfelder zurückgeführt.

Aus der Theorie der Galoisfelder entnehmen wir die Tatsache, dass zu jeder Primzahlpotenz $n = p^s$ ($s > 0$) ein und bis auf Isomorphie nur ein Galoisfeld existiert, das genau n Elemente besitzt ¹⁾.

Auf die Modelle des räumlichen AAS angewandt heisst das:

Satz 12. Zu jeder Primzahlpotenz $n = p^s$ ($s > 0$) gibt es ein und bis auf Isomorphie nur ein Modell des räumlichen AAS, das auf einer Geraden genau n Punkte besitzt.

Mit den Sätzen 3 und 12 kann die Anzahl der Punkte, Geraden und Ebenen der Modelle sofort berechnet werden.

¹⁾ Vgl. etwa B. L. v. d. WAERDEN, *Moderne Algebra I*, S. 122, Berlin 1937.

Uebersicht über die 10 kleinsten Modelle des räumlichen AAS.

Anzahl Punkte auf einer Geraden	2	3	4	5	7	8	9	11	13	16
Punkte des Modells	8	27	64	125	343	512	729	1331	2197	4096
Geraden des Modells	28	117	256	775	2793	4672	7371	16093	30927	69888
Ebenen des Modells	14	39	84	155	399	584	819	1463	2379	4368

Aus der Tabelle entnehmen wir das *Minimalmodell*: Auf jeder Geraden liegen 2 Punkte; das ganze Modell besteht aus 8 Punkten, 28 Geraden und 14 Ebenen.

Eine genauere Einsicht in ein bestimmtes Modell lässt sich nur aus der Kenntnis des zugehörigen Galoisfeldes gewinnen.

§ 11. Ueber die Erweiterung der Modelle des räumlichen AAS.

M_0 sei irgend ein Modell des räumlichen AAS. M_1 heisst dann als Modell »Obermodell« von M_0 , oder M_0 »Untermmodell« von M_1 , wenn folgendes gilt: Jeder Punkt, jede Gerade und jede Ebene von M_0 ist zugleich Punkt, Gerade bzw. Ebene von M_1 und jede Relation in M_0 gilt unverändert auch in M_1 . Es besteht nun der folgende

Erweiterungs-Satz. Zu jedem Modell des räumlichen AAS gibt es ein echtes Obermodell¹⁾.

Man kann diesen Satz auch so ausdrücken: Kein Modell des räumlichen AAS ist »vollständig,« d.h. es ist immer möglich zu einem System von Punkten, Geraden und Ebenen, das die Axiome erfüllt, weitere Punkte Geraden und Ebenen, so hinzuzufügen, dass in dem durch Zusammensetzung entstehenden System wieder die sämtlichen Axiome erfüllt sind.

Beweis: M_0 sei irgend ein Modell des räumlichen AAS, das gemäss § 10 Sätze 10 und 11 vermittelt eines Galoisfeldes $GF(p^s)$ konstruiert sei. Zu diesem GF gibt es eine unendliche Folge von echten Oberkörpern, nämlich die $GF(p^{ks})$, ($k = 2, 3, \dots$). Jedes dieser Galoisfelder gestattet wieder nach § 10 Satz 10 die Konstruktion eines Modells. Und jedes dieser Modelle ist offenbar ein Obermodell von M_0 . Unser Satz kann also dahin verschärft werden, dass die mittels der Galoisfelder $GF(p^{ks})$ konstruierten Modelle auch die einzigen Obermodelle von M_0 sind.

¹⁾ Wie leicht ersichtlich, gilt der Satz auch für die Modelle des AAS.

Ich wurde am 13. April 1915 in Bern geboren. Dasselbst besuchte ich Primarschule, Progymnasium und städtisches Realgymnasium.

Nach bestandener Matur liess ich mich an der Universität Bern immatrikulieren. Meinen Neigungen entsprechend, belegte ich Vorlesungen über Mathematik, Astronomie und Physik.

Während meiner Studienzeit hörte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren Greinacher, Gruner, Hadwiger, Mauderli, Michel und Scherrer.

Für die mir zuteil gewordene wissenschaftliche Ausbildung bin ich allen meinen Lehrern, insbesondere den Herren Professoren Hadwiger, Mauderli und Scherrer zu tiefem Dank verpflichtet.

Neben meiner Tätigkeit in der Industrie hörte ich in Zürich Vorlesungen bei den Herren Professoren Bernays und Wentzel. Auch ihnen möchte ich an dieser Stelle meinen Dank zum Ausdruck bringen.
